

## PLANIFICAÇÕES DE POLIEDROS II

*L. N. Gonçalves*

Centro de Física da Matéria Condensada, Universidade de Lisboa

Nesta segunda parte serão apresentadas planificações de poliedros com elevada fracção de vértices planos, de um poliedro com o número mínimo de vértices não-planos, de um poliedro toroidal, de um poliedro pontualmente flexível, de um poliedro flexível e de dois sólidos com arestas curvas. É de lembrar que são vértices planos os do interior da planificação. Sendo  $\Theta$  o ângulo coberto pela cartolina à volta de um vértice tem-se:

**Vértice plano:**  $\Theta = 2\pi$  rad.

**Vértice não-plano:**  $\Theta \neq 2\pi$  rad.

**Vértice hiper-plano:**  $\Theta > 2\pi$  rad.

Os vértices planos têm um “ângulo de defeito”  $\delta = 2\pi - \Theta$  nulo.

Como vimos no exemplo da figura 15 da parte I, em que há três vértices planos, a existência de concavidades pode facilitar bastante o desenho das planificações. Da figura 1 à 11, são vários os exemplos de poliedros cujas planificações possuem vértices planos.

**Exercício 1** *a) Desenhe uma planificação análoga à da figura 4 mas com quadrados. b) Desenhe planificações análogas às das figuras 6 ou 7 mas colando tetraedros às faces de um tetraedro ou colando pirâmides quadradas às faces de um cubo. c) Quantos tetraedros pode colar a um cuboctaedro (se quiser planificá-lo)? d) Desenhe a planificação do poliedro que se obtém colando pirâmides em todas as faces de um prisma pentagonal. e) Construa um poliedro análogo ao da figura 5 que tenha 3/20 de vértices não-planos. f) Quantos poliedros diferentes é que se podem construir com a planificação 11?*

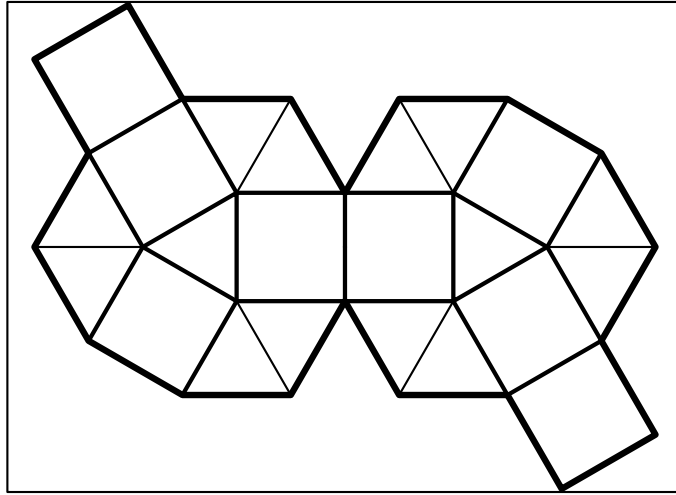


Figura 1: Quatro prismas triangulares iguais. Um ao centro na vertical e os outros à volta na horizontal.

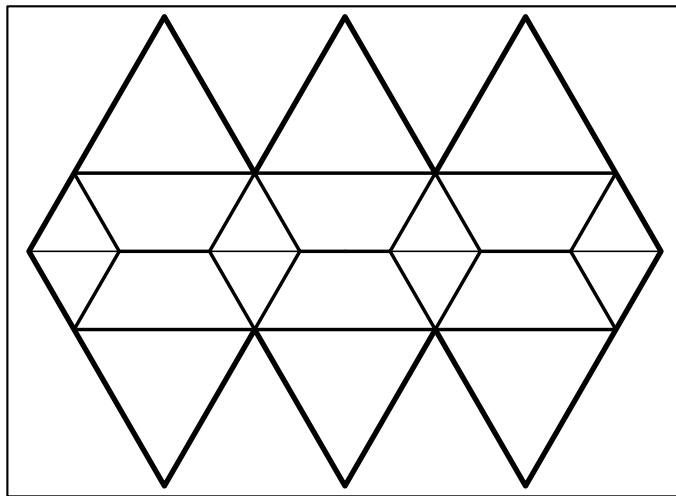


Figura 2: Este poliedro tem metade dos vértices planos e constitui uma das formas dos cristais de espinela ( $\text{MgAl}_2\text{O}_4$ ).

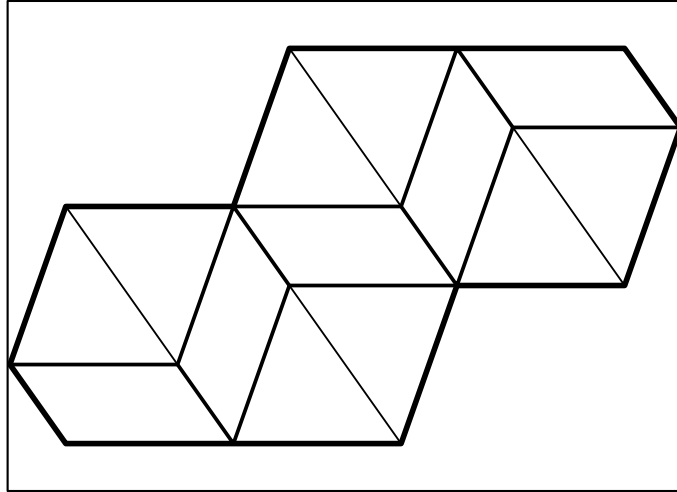


Figura 3: Adicionar arestas a um prisma quadrangular, fazendo cortes, pode simplificar a planificação.

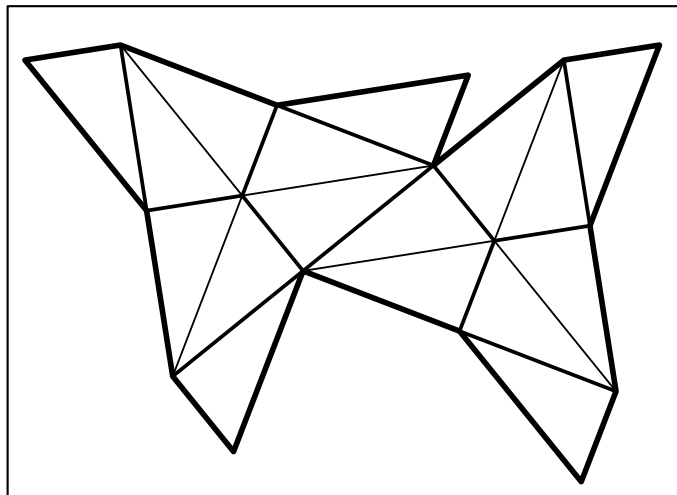


Figura 4: Unir dois triângulos equiláteros pelas bordas.

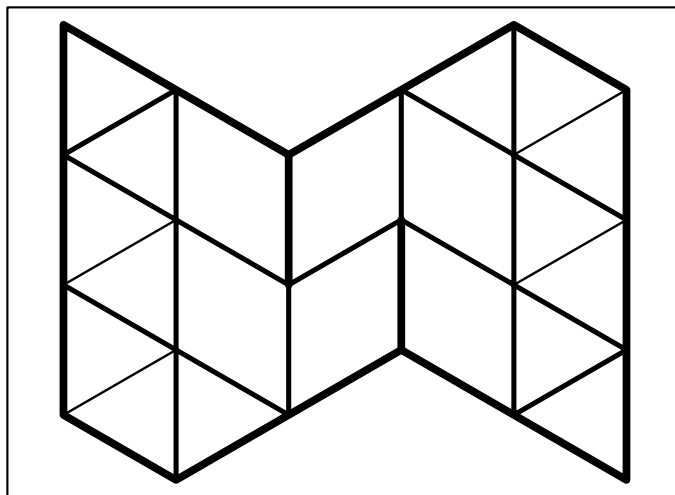


Figura 5: Um par de vértices define uma recta que é completamente exterior ao volume do poliedro.

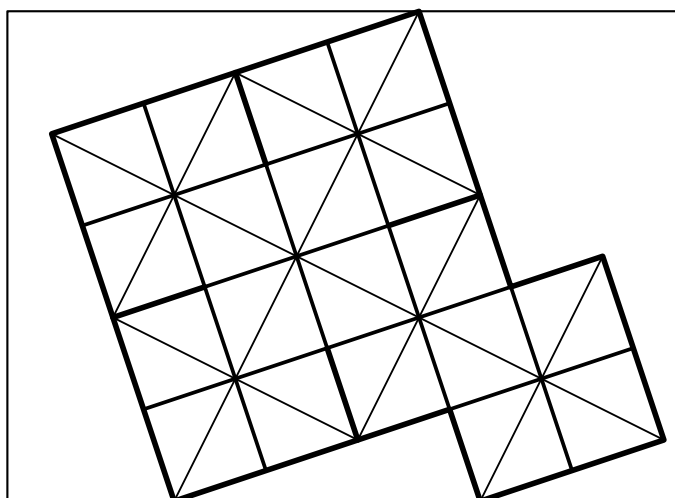


Figura 6: Colar a cada face de um octaedro uma pirâmide de lados isósceles rectângulos.

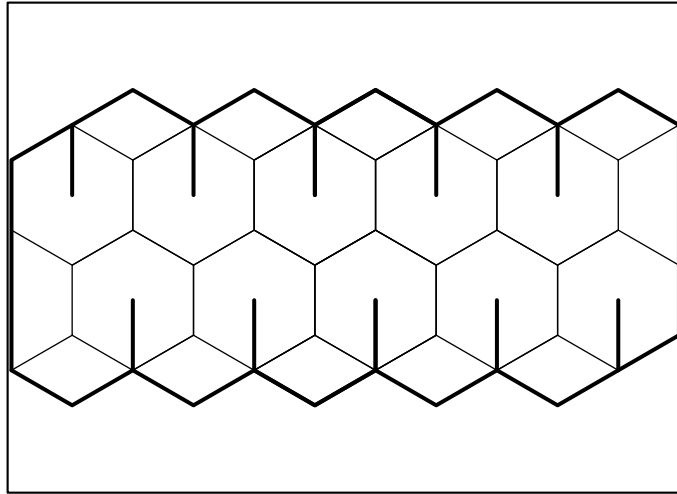


Figura 7: Colar pirâmides pentagonais às faces de um dodecaedro. As linhas de espessura “normal” não foram representadas.

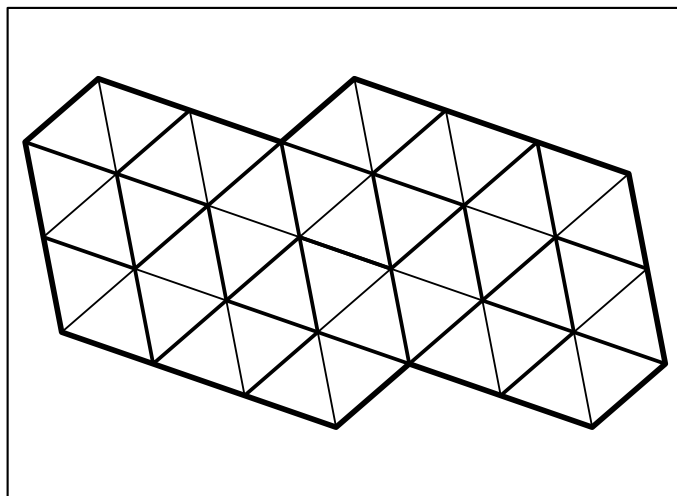


Figura 8: Colar quatro tetraedros a um icosaedro por forma que os tetraedros não contactem entre si.  $1/4$  de vértices não-planos.

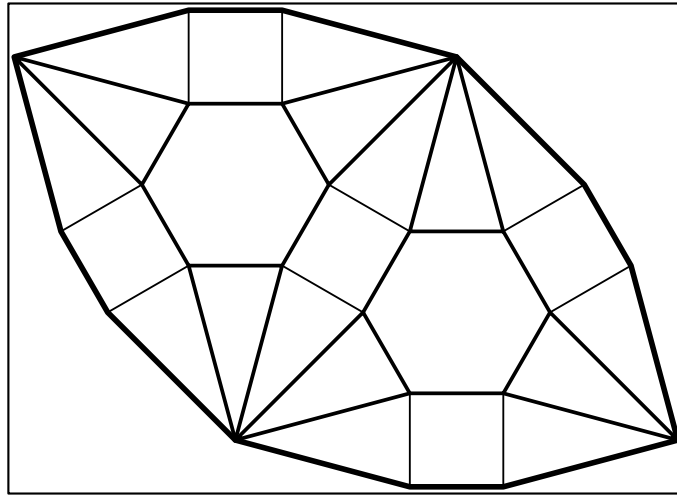


Figura 9: Apenas três vértices não-planos.  $1/5$  de vértices não-planos. Dobragens muito difíceis. Três é o número mínimo de vértices não-planos que um poliedro pode ter pois, dado que o “ângulo de defeito total” é  $4\pi$  rad, se se tivesse um poliedro com apenas dois vértices não-planos, cada um teria um “ângulo de defeito” de  $2\pi$  rad, ou seja, não existiria.

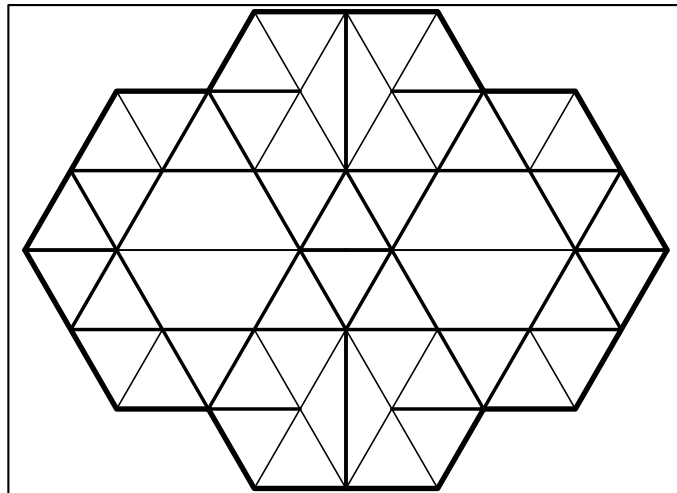


Figura 10:  $1/6$  de vértices não-planos.

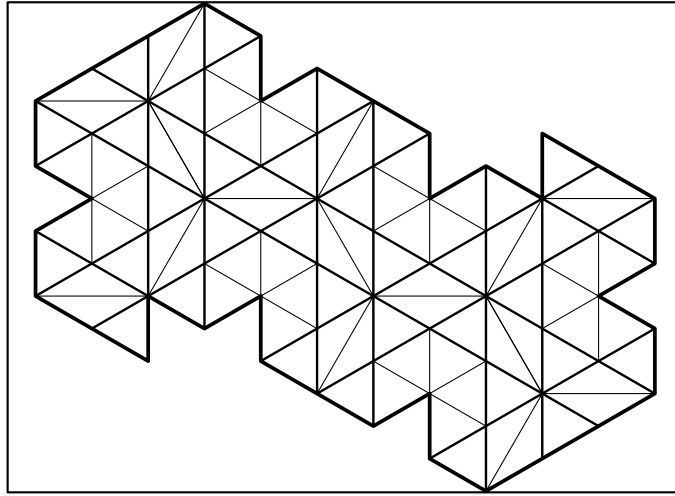


Figura 11: Apenas 3/19 de vértices não-planos. Poliedro de 72 faces baseado no cubo..

## 1 Toro

Nesta secção será apresentado um processo para imaginar um poliedro toroidal e a sua planificação. Este processo pressupõe que é possível:

- Obter concavidades acentuadas usando apenas triângulos equiláteros (ver figura 12).
- Planificar vértices hiper-planos. São vértices hiper-planos aqueles cuja soma dos ângulos medidos sobre as faces à sua volta é superior a  $2\pi$  rad (ver figura 13).
- Construir um poliedro toroidal com a mesma simetria que o disfenóide cuja planificação se encontra na figura 14.

A primeira parte do processo consiste em orientar um hexaedro (dois tetraedros colados) segundo a descrição da figura 15. A segunda parte consiste em unir quatro hexaedros, todos orientados de maneira análoga. A terceira parte consiste em adicionar vértices em localizações bem determinadas. Considere os vértices indicados na figura 15. Transforme C em C' por reflexão no plano ABD. Obtem-se

$$\overline{CC'} = \sqrt{4 - \frac{242}{147 - 20\sqrt{15}}}$$

Se aproximar esta distância por  $\sqrt{3} - 1$  não cometerá um erro significativo e não precisará de régua para a medir pois a altura de dois triângulos equiláteros de lados unitários é  $\sqrt{3}$  (ver figura 16).

O erro que comete é da ordem de um e meio por cento. Os erros resultantes da espessura da cartolina e da montagem dos poliedros também são desta ordem e também não são, de maneira geral, significativos. No entanto há dois casos em que estes erros seriam inaceitáveis:

- Comparando a superfície específica de poliedros capazes de preencher o espaço [1].
- Tentando detectar flexibilidade. Este caso será estudado mais a fundo na secção seguinte.

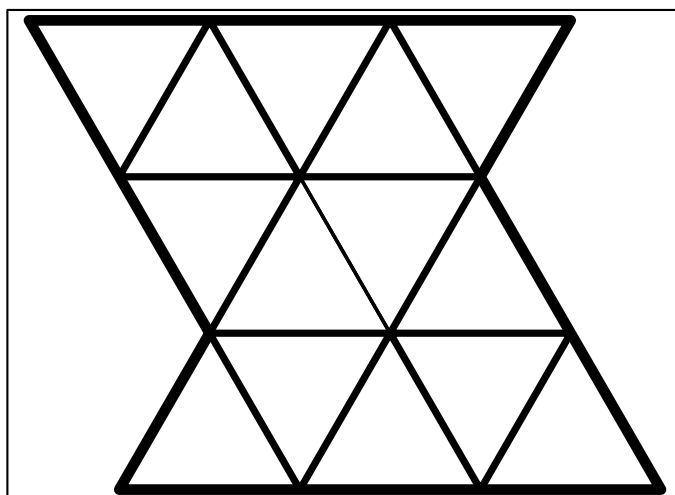


Figura 12: Depois de construído este poliedro experimentalmente forçar a aproximação dos dois vértices de menor  $\Theta$ . Verifique o que acontece aos vértices planos durante esse processo.

## 2 Flexíveis

O poliedro da figura 17 poderá parecer flexível mas nem sequer é um poliedro. As faces só parecem encaixar umas nas outras porque a cartolina se deforma ligeiramente. As arestas têm comprimentos mal calculados. Um



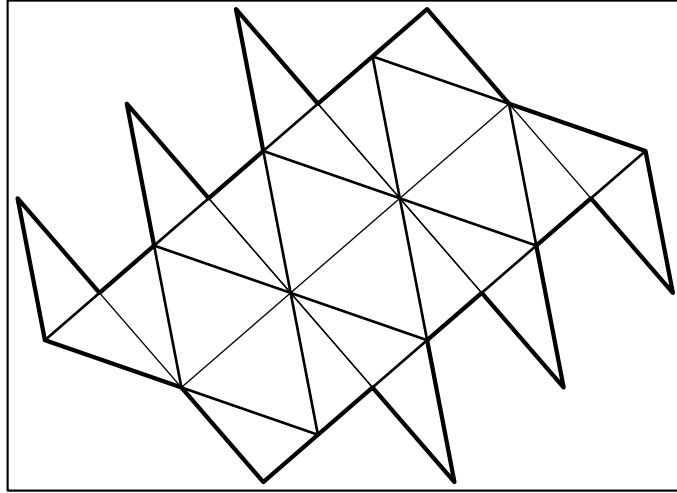


Figura 13: Os dois vértices hiper-planos deste poliedro possuem  $\Theta = 3\pi$  rad.

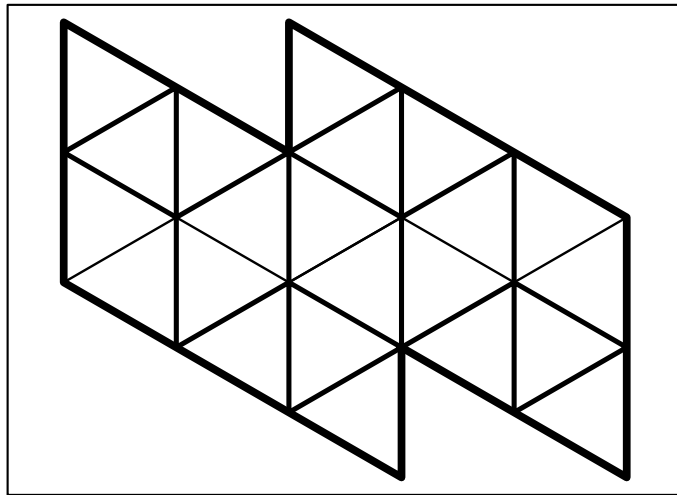


Figura 14: Disfenóide.

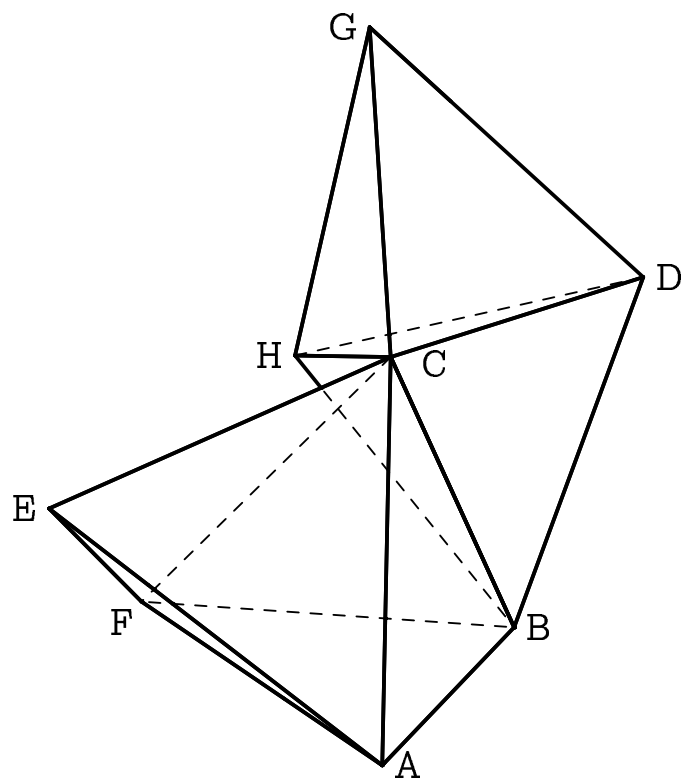


Figura 15: Arestas: EF e GH pertencem ao plano  $xz$ ; BC pertence ao plano  $yz$ ; CF e CH pertencem a planos verticais que fazem um ângulo diedro de  $\frac{\pi}{4}$  rad com  $yz$ . Ângulos:  $\theta$  (entre EB e o plano  $xy$ ).

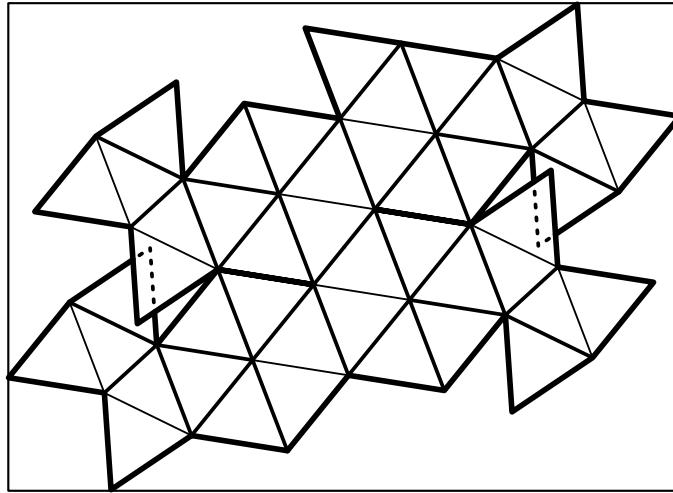


Figura 16: Planificação de um poliedro toroidal.

cálculo, feito com base na figura 18, indica que se deveria ter  $r \approx 0.94414$  em vez de  $r = 1$ . Por outro lado, a figura 19 indica que o poliedro é apenas pontualmente flexível [2, 3, 4]. Considera-se flexível todo o poliedro cujos ângulos interfaciais podem variar sem alterações da forma das faces. Foi demonstrado que estes poliedros têm volume constante [5], possuem arestas côncavas [6] e são flexíveis numa gama de ângulos interfaciais [7]. Um exemplo devido a Klaus Steffen da Universidade de Dusseldorf é o da figura 20.

**Exercício 2** a) *Verifique se é possível construir um poliedro toroidal cujas faces sejam todas triângulos equiláteros.* b) *Verifique se é possível construir um poliedro flexível apenas com as faces da figura 9 da parte I.*

### 3 Arestas Curvas

Estudos de David Huffman [8] mostram que sólidos geométricos construídos a partir de folhas de papel podem possuir arestas curvas. Estas são mais difíceis de desenhar e vincar do que as rectas, no entanto, permitem a construção de sólidos bastante simples. É claro que estes sólidos não são poliedros mas podem ser construídos de maneira análoga, em particular, de maneira análoga aos poliedros com elevada fracção de vértices planos. Por

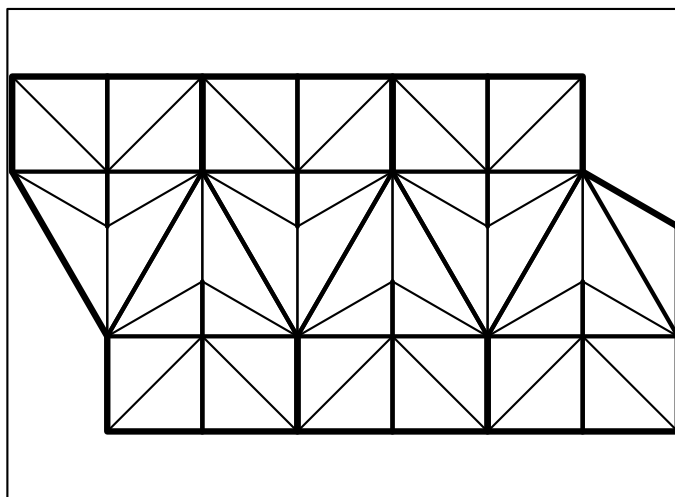


Figura 17: Planificação com arestas mal calculadas.

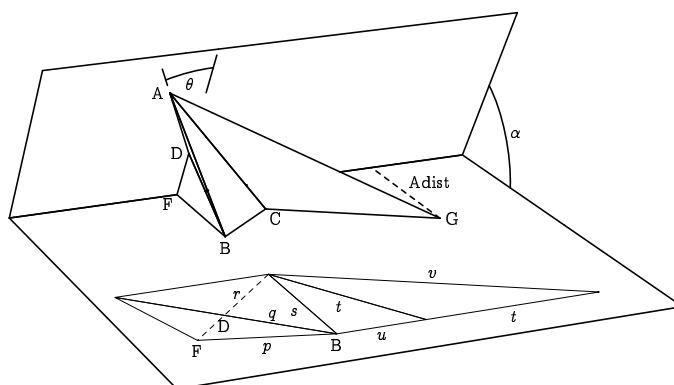


Figura 18: Esquema descritivo das variáveis usadas no cálculo dos comprimentos das arestas do poliedro cuja planificação se encontra na figura 17. Aqui está representada uma das doze partes iguais que constituem o referido poliedro. As partes não encaixam perfeitamente se a distância entre o ponto A e a linha que é vértice do ângulo  $\alpha$  não for igual a Adist. O plano BDF é vertical e não contém nenhuma das faces do poliedro da figura 17.

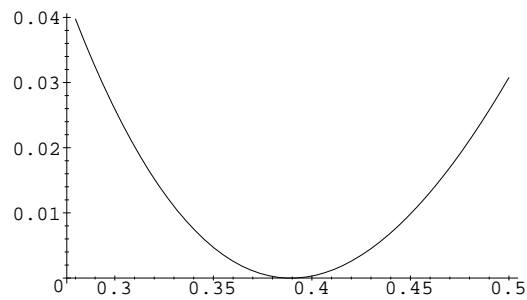


Figura 19: Erro relativo de Adist em função de  $\theta$ .

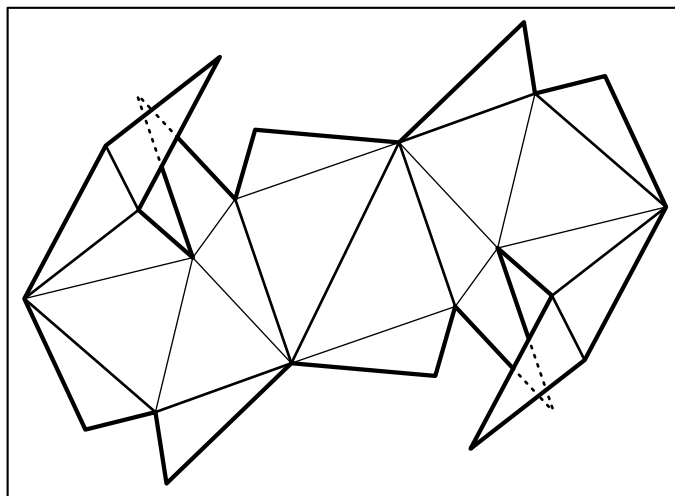


Figura 20: Planificação de um dos mais simples poliedros flexíveis conhecidos. Este poliedro só tem quatro tipos de faces, todas triangulares, nenhuma das quais se encontra na figura 9 da parte I. Os comprimentos das arestas em unidades arbitrárias para cada face são:  $(12,12,17)$ ,  $(10,10,11)$ ,  $(12,12,11)$  e  $(5,10,12)$ .

exemplo, podemos adaptar a planificação 9 para obter a da figura 21. A forma das arestas curvas pode ser definida por uma expressão quadrática ou por um “spline” de Bézier sem inflexões. Se pegarmos num tetraedro e curvamos uma aresta obtemos um sólido como aquele cuja planificação se encontra na figura 22.

**Exercício 3** a) *Modifique a planificação 2 por forma a possuir arestas curvas.* b) *Qual é a expressão mais simples que define a forma de arestas curvas quando planificadas?* b) *As arestas curvas pertencem sempre a um plano?*

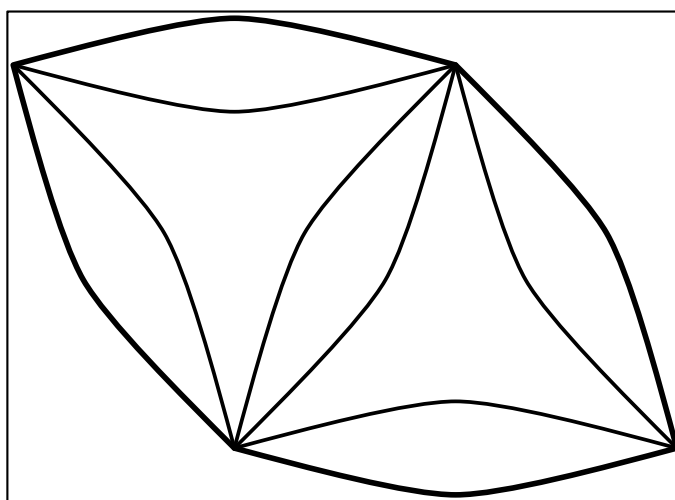


Figura 21: Planificação dum sólido com arestas curvas baseado no poliedro da figura 9.

A colecção de planificações pode ser descarregada a partir de:  
<http://pisco.cii.fc.ul.pt>

O autor agradece as críticas e as palavras de incentivo de Rui Rodrigues, Adérito Araújo, Eduardo Veloso e Gil Fonseca.

## Referências

- [1] Denis Weaire, Robert Phelan, 1994, “A counterexample to Kelvin’s conjecture on minimal surfaces” *Phil. Mag. Lett.* **69** 107–110.

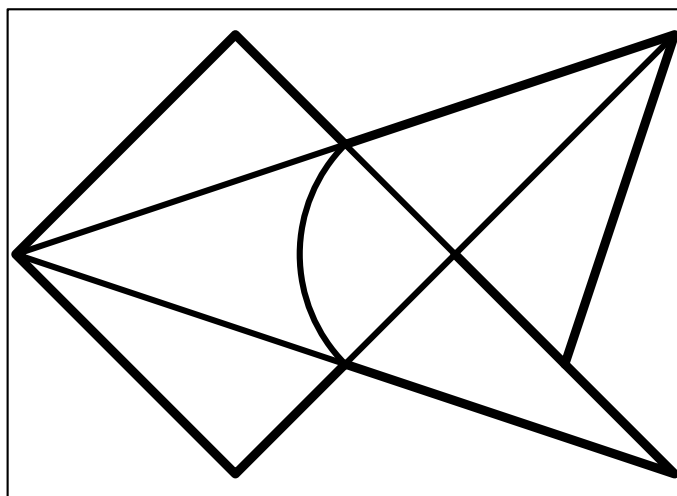


Figura 22: Planificação dum sólido com arestas curvas baseado no tetraedro.

- [2] Ver a página 161 do livro “The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry” de David Wells (1991) que mostra o icosaedro ortogonal de Jessen, também pontualmente flexível.
- [3] Michael Goldberg, 1978, “Unstable Polyhedral Structures”, *Mathematics Magazine* **51** N<sup>o</sup>3, 165–170.
- [4] Walter Wunderlich, 1979, “Snapping and Shaky Antiprisms”, *Mathematics Magazine*, **52** N<sup>o</sup>4, 235–236.
- [5] Robert Connelly, I. Sabitov, A. Walz, 1997, “The Bellows Conjecture”, em “Contributions to Algebra and Geometry”, **38** N<sup>o</sup>1, 1–10.
- [6] Cauchy, 1813, Second Mémoire, *J. École Polytechnique*, **9** 87, os poliedros convexos não podem ser flexíveis.
- [7] Robert Connelly, 1979, “How to Build a Flexible Polyhedral Surface”, em “Geometric Topology” Proceedings of the 1977 Georgia Topology Conference (Athens, Georgia), edit. James C. Cantrell, Academic Press, 675. Robert Connelly, 1979, “The Rigidity of Polyhedral Surfaces”, *Mathematics Magazine*, **52** N<sup>o</sup>5, 275–283.

- [8] <http://www.sgi.com/grafica/huffman/index.html>, David A. Huffman, 1976, “Curvature and creases: A primer on paper”, IEEE Trans. Comput. C-25, 1010–1019