Boletim da SPM - n$^{\underline{o}}$ 43
Outubro de 2000

Planificações de Poliedros I

L. N. Gonçalves
Departamento de Física, Faculdade de Ciências e Tecnologia, UNL

Imaginar poliedros, conceber as suas planificações e construí-los é uma actividade capaz de exercitar e desenvolver, por exemplo:

- a capacidade de visualização,
- o interesse pela geometria e
- o gosto de experimentar.

Neste documento ensaia-se uma maneira de abordar esta actividade [1, 2]. Assume-se que se aprende a conceber planificações por um processo de tentativa e erro. Imagina-se uma hipótese de planificação, verifica-se se permite montar o poliedro pretendido e volta-se ao princípio. Não há uma receita para determinar a boa planificação automaticamente. Cada poliedro pode ser planificado de muitas maneiras. A maneira que se acaba por escolher é a que melhor satisfaz os critérios pessoais da estética e da funcionalidade.

Começamos por uma pirâmide quadrangular, logo a seguir uma dupla pirâmide pentagonal e terminamos esta primeira parte com mais alguns exemplos de poliedros convexos, imaginando cortes e colagens.

1 Teoria

Comecemos por uma pirâmide de base quadrada (ver figura 1). Se os lados da base tiverem comprimento l e se a pirâmide tiver altura h então o comprimento das arestas que se unem no vértice superior é $x = \sqrt{\frac{1}{2}l^2 + h^2}$. Munidos dos comprimentos de todas as arestas já podemos desenhar a planificação da pirâmide (ver figura 2). Agora recorta-se, dobra-se pelas arestas e usam-se as abas para colar. Aqui surge um problema: a última das faces a colar corta o acesso ao interior do poliedro e dificulta o pressionar da cola. Isto leva à utilização de cartolina muito fina por forma a tornar as dobras mais elásticas e exigirem menos pressão. Porém isto também torna o poliedro muito fácil de amachucar. É possível montar poliedros bastante rígidos aplicando a seguinte metodologia:

1. Em vez de abas desenhe as faces a que as abas colariam (ver figura 3).

2. Depois de vincar as arestas, coloque as faces alternadamente no lado exterior e no interior.

3. Use fita-cola para fixar a cartolina.

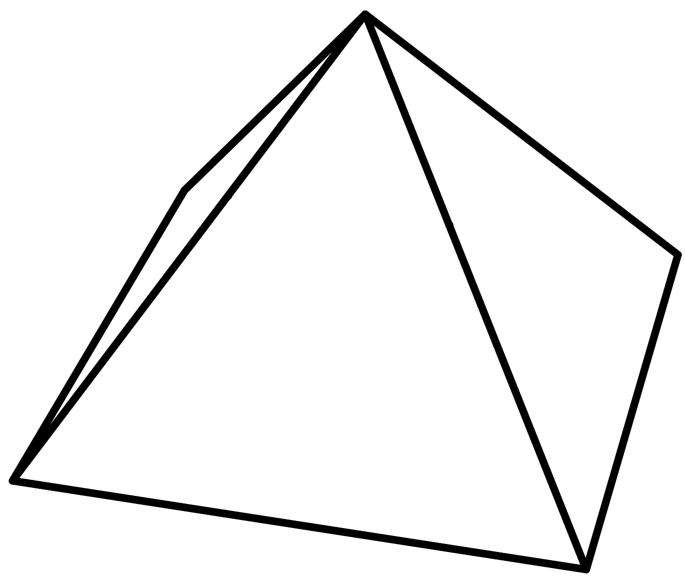

Figura 1: Pirâmide de base quadrada e faces laterais triangulares equiláteras. Veja também a secção 2.

As planificações devem ser pensadas tendo em conta esta metodologia. Mesmo para melhorar a precisão dimensional deve reduzir-se o número médio de faces sobrepostas (ver figura 4). De maneira geral é boa política que as planificações possuam simetria central, que as faces com maior número de lados fiquem ao centro e que as faces encaixem como uma "dentadura". Por exemplo, uma dupla pirâmide de base pentagonal (ver figura 5) poderia ser planificada tal como se mostra na figura 6 ou então como na 7.

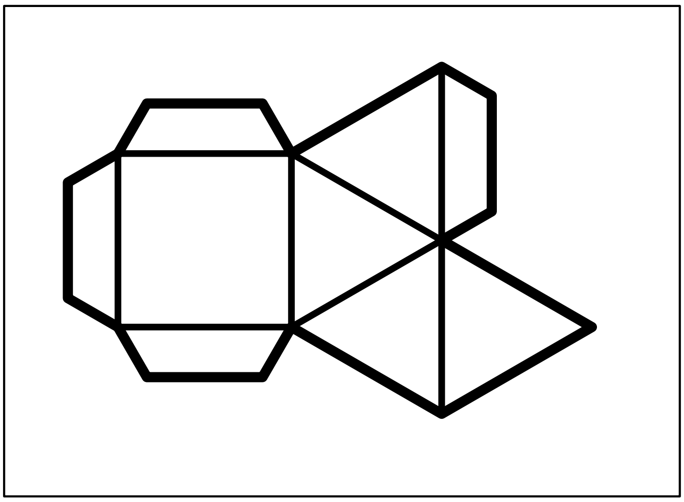

Figura 2: Planificação típica da pirâmide da figura 1.

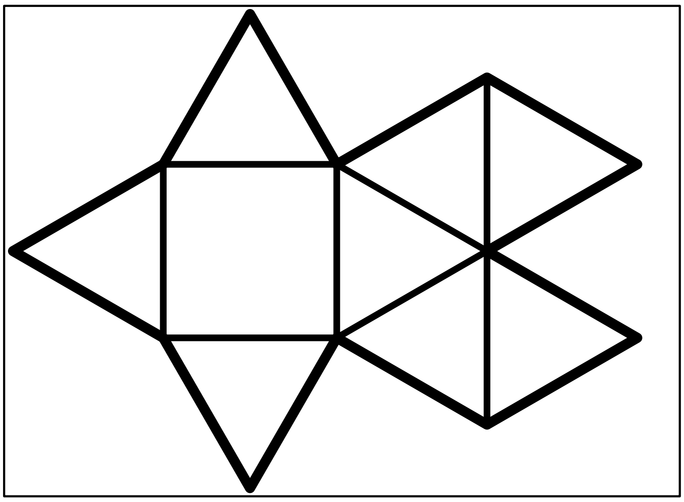

Figura 3: Planificação modificada da pirâmide da figura 1.

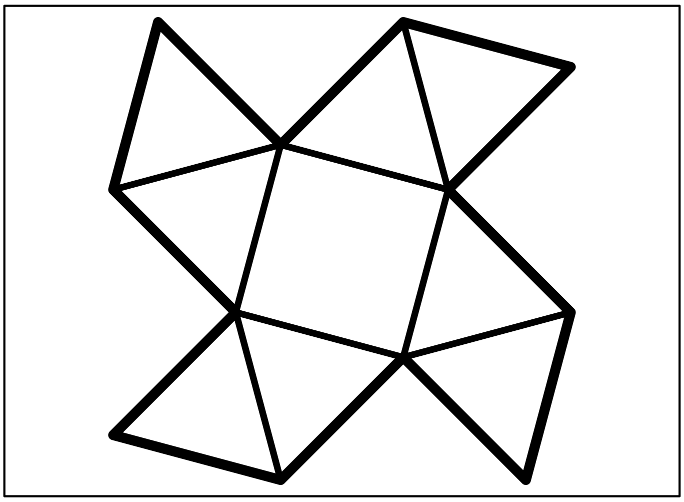

Figura 4: Planificação proposta para a pirâmide da figura 1.

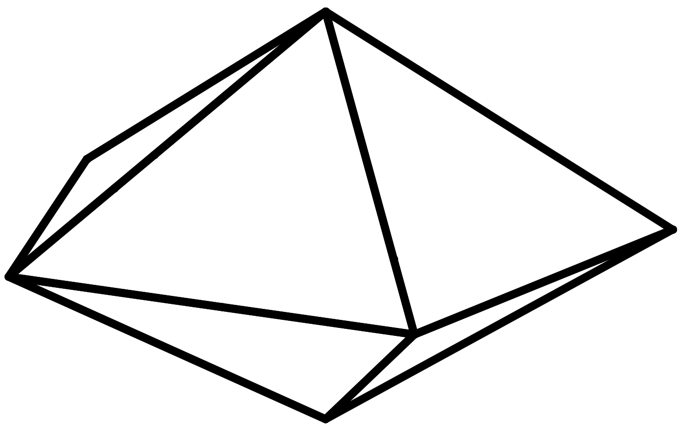

Figura 5: Dupla pirâmide de base pentagonal e faces laterais triangulares equiláteras.

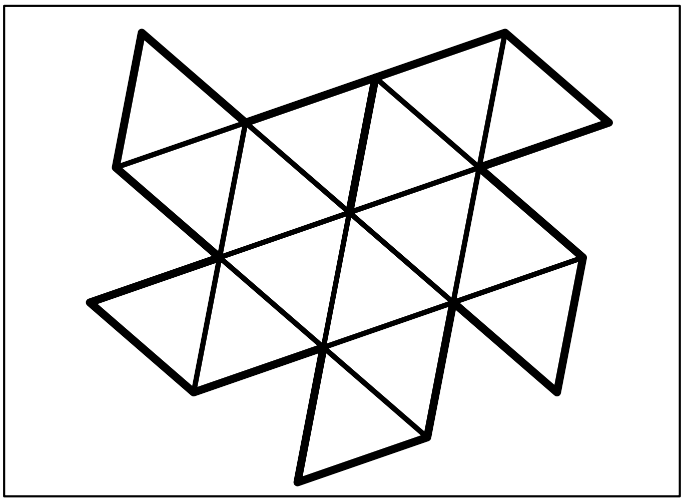

Figura 6: Planificação possível do poliedro da figura 5. Veja também a figura 8.

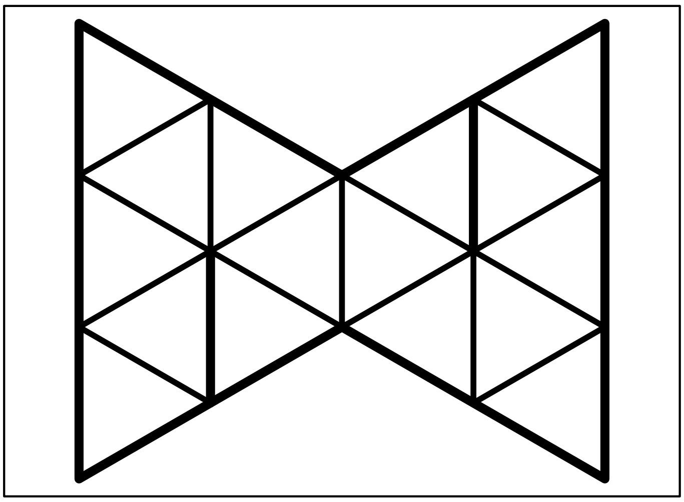

Figura 7: Planificação proposta para o poliedro da figura 5.

2 Notação

As linhas usadas no desenho das planificações devem ser interpretadas de acordo com o esquema da figura 8. Por outro lado, na figura 9 são descritos os tipos de faces usados. Todas as planificações são combinações deste conjunto de faces. Note-se ainda que só se consideram planificações de um único pedaço de cartolina.

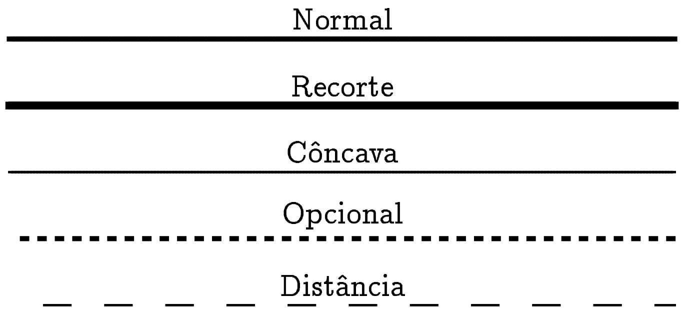

Figura 8: Tipos de linhas usados nos desenhos de planificações. As linhas "Normal" e "Concâva" indicam as posições dos vincos, dobras ou arestas. Se fizer vincos convexos sobre as linhas "Normais" então deverá fazer vincos côncavos sobre as linhas "Côncavas" e vice-versa. A cartolina deverá ser recortada segundo as linhas de "Recorte". Se pretender desenhar as planificações com régua e compasso respeite as "Distâncias" indicadas.

3 Prática

Vejamos agora um cubo. Uma planificação possível é a que se apresenta na figura 10. Quando se deforma o cubo a planificação ressente-se (ver figura 11). A deformação aplicada consiste em afastar dois vértices que se encontrem sobre uma linha recta que contenha o centro do cubo.

Exercício 1 *a) Suponha que corta o cubo unitário da figura 12 por um plano que contém A, B e C. Retire a parte que contém D e esqueça-a. Qual é a distância de E ao plano ABC? b) Cole um tetraedro de lados $\sqrt{2}$ à superfície de corte. Corte o que resta do cubo segundo os planos que contêm as faces expostas do tetraedro. Nestas condições a linha EF é cortada a que distância de F? c) Desenhe a respectiva planificação.*

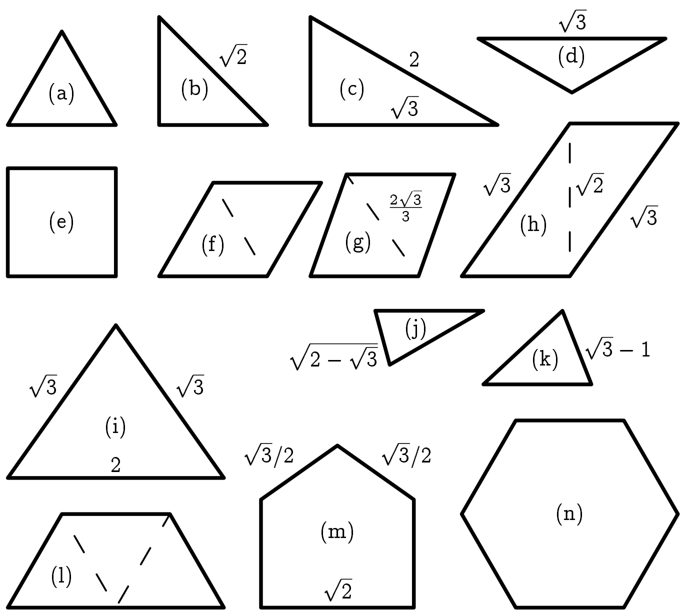

Figura 9: Tipos de faces usados nos desenhos das planificações. (a) Triângulo equilátero. (b) Triângulo isósceles rectângulo. (c) Triângulo escaleno rectângulo. (d), (i), (j) e (k) Triângulos isósceles. (e) Quadrado. (f), (g) e (h) Losangos. (l) Trapézio. (m) Pentágono irregular. (n) Hexágono. As distâncias não indicadas são unitárias. O menor ângulo de (c) e (j) é $\pi/6$.

Introduzamos agora uma pequena modificação no poliedro da figura 11: vamos substituir duas faces por quadrados. Em princípio as duas faces a substituir não terão arestas em comum (ver figura 13). Agora se a substituição por quadrados tiver lugar em faces com uma aresta em comum somos forçados a dobrar losangos (ver figura 14).

Exercício 2 *a) Verifique que os poliedros das figuras 11 e 13 têm o mesmo volume. b) Construa um poliedro que se possa obter cortando ao meio qualquer dos dois. c) Planifique os dois poliedros análogos aos das figuras 10 e 11 mas cujas faces são do tipo (g) na figura 9.*

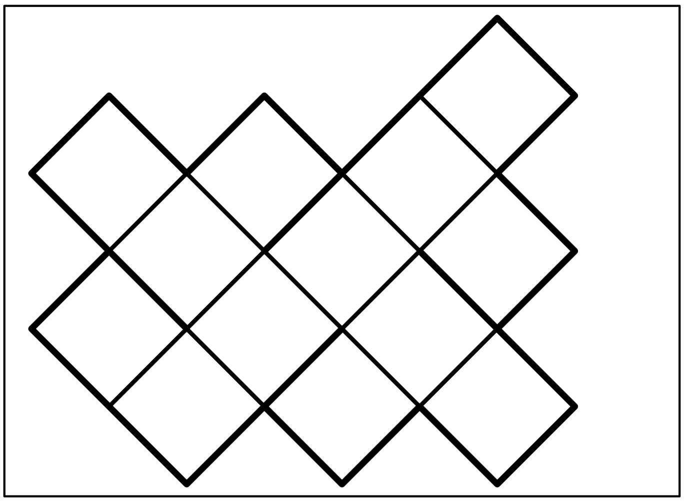

Figura 10: Planificação proposta para o cubo.

4 Definições

Concerteza reparou que ao recortar o poliedro da figura 14 a tesoura não atinge o vértice indicado. Isto quer dizer que se poupou uma aba. A dobragem ficou mais díficil mas a rigidez do poliedro foi aumentada. Os vértices a que a tesoura não chega serão, daqui em diante, denominados por vértices planos. Planos no sentido em que a cartolina cobre 2π rad à sua volta. Estes vértices são necessariamente extremos de uma ou mais arestas côncavas. Vários tipos de vértices podem ser definidos com base no ângulo Θ coberto

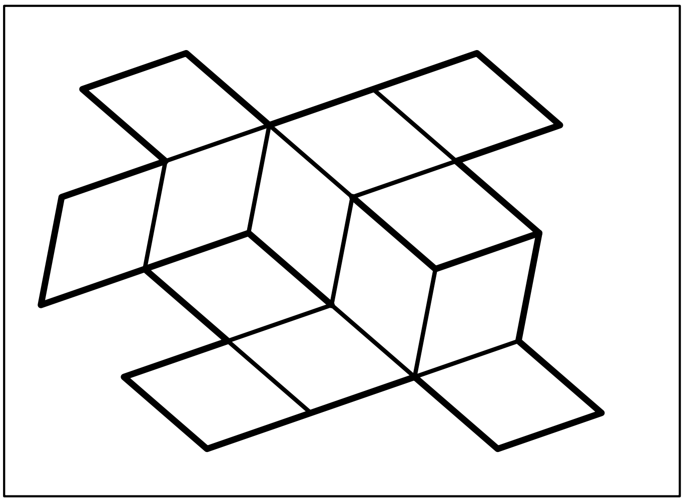

Figura 11: Planificação de um cubo deformado em que as faces são losangos.

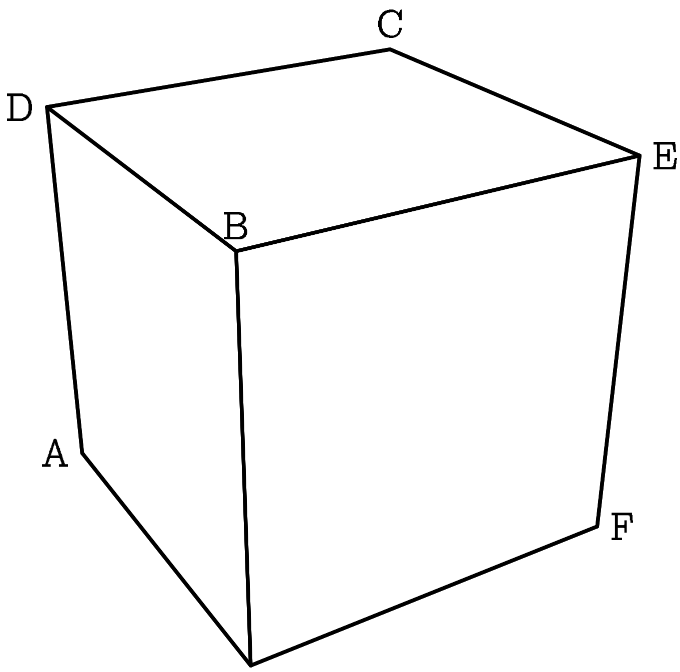

Figura 12: Cubo para exercício.

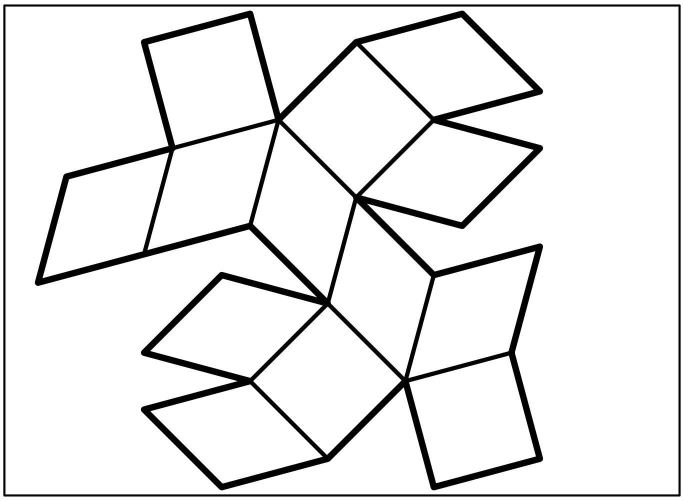

Figura 13: Planificação de um cubo deformado em que quatro das faces são losangos.

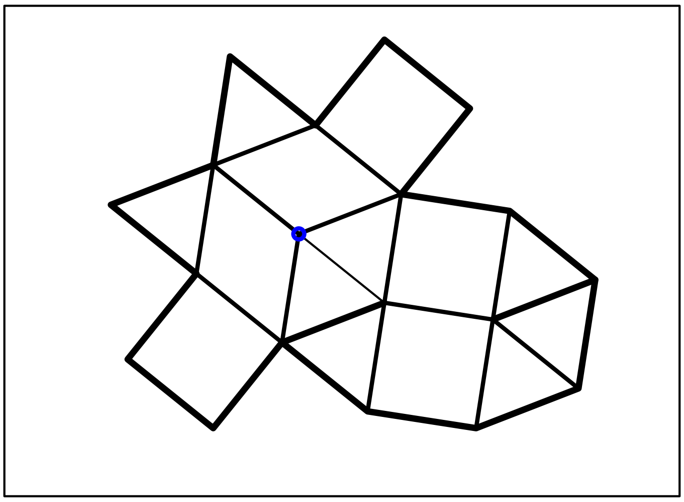

Figura 14: Planificação de um poliedro com um vértice plano. O vértice plano está indicado por um pequeno círculo. Ver no texto a definição de vértice plano.

pela cartolina à volta dos mesmos.

$$\Theta = \sum_{i=1}^{N_f} \theta_i$$

em que N_f é o número de faces do poliedro que partilham um vértice e θ_i é o ângulo no canto da face i que contém esse vértice.

Vértice plano: $\Theta = 2\pi$ rad.

Vértice não-plano: $\Theta \neq 2\pi$ rad.

Vértice hiper-plano: $\Theta > 2\pi$ rad.

Descartes definiu o "ângulo de defeito" $\delta = 2\pi - \Theta$. A soma de todos os "ângulos de defeito" de um poliedro é sempre 4π. A demonstração envolve o teorema de Euler ($V + F = A + 2$ em que V é o número de vértices, F é o número de faces e A é o número de arestas) mas não será apresentada aqui.

5 Continuação da Prática

Regressemos ao cubo que foi cortado de acordo com o exercício 1a). Una, pela face triangular, dois iguais a esse (ver figura 15).

E agora regressemos ao início: a pirâmide da figura 1. Se se unirem duas pela base obtemos um octaedro. Os octaedros e os cubos são poliedros duais. Têm o mesmo número de arestas mas trocam os vértices por faces e vice-versa. Imagine o seguinte: pega num octaedro e corta os seis vértices a uma certa distância do centro sempre perpendicularmente aos eixos de simetria. São eixos de simetria as três linhas rectas que contêm o centro e um par de vértices. Imagine que começa por cortar muito pouco e que vai diminuindo gradualmente a distância ao centro. A certa altura as faces triangulares equiláteras do octaedro original transfomaram-se em hexágonos. Trata-se de um octaedro truncado, também conhecido por poliedro de Kelvin [3]. Não é possível obter uma planificação de acordo com o método descrito na Teoria porque sobra muito pouco espaço para as abas. Se fizer o mesmo com um tetraedro obtem espaço à justa (ver figura 16). Mas continuemos a cortar. Quando os hexágonos se tiverem reduzido a triângulos terá nas mãos um cuboctaedro (ver figura 17). Continuemos, finalmente chegamos ao cubo.

Voltemos a olhar para o octaedro. Quando colocado em cima da mesa vê-se uma faixa horizontal de triângulos (ver figura 18) alternadamente virados para cima e para baixo. A base pode ter qualquer forma. Quadrada por exemplo. Colemos a nossa pirâmide de partida a uma destas bases quadradas (ver figura 19). Mas repare: em vez de colar a pirâmide pode escavar uma pirâmide e a planificação é a mesma (ver figura 20).

Pegando num octaedro ou num cubo e cortando as arestas até as faces originais desaparecerem obtem-se o poliedro da figura 21. Trata-se do dodecaedro rômbico [4]. É possível preencher completamente o espaço encaixando dodecaedros rômbicos uns nos outros.

Exercício 3 *Considerando a analogia com o poliedro da figura 21 determine o ângulo (diedro) entre as faces sombreadas do poliedro cuja planificação se encontra na figura 23.*

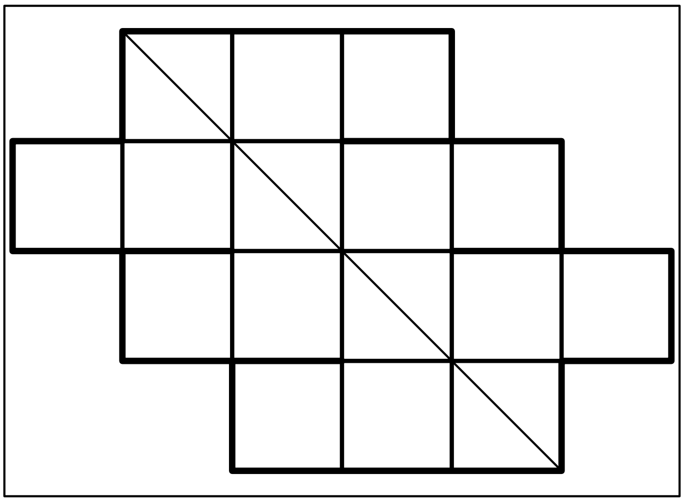

Figura 15: Planificação do poliedro que se obtem unindo pela face triangular dois cubos cortados de acordo com o exercício 1a). Este poliedro possui três vértices planos.

O autor agradece as críticas e as palavras de incentivo de Rui Rodrigues, Adérito Araújo, Eduardo Veloso e Gil Fonseca.

Referências

[1] Peter Hilton, Jean Pedersen, "Build Your Own Polyhedra", Addison Wesley (1988).

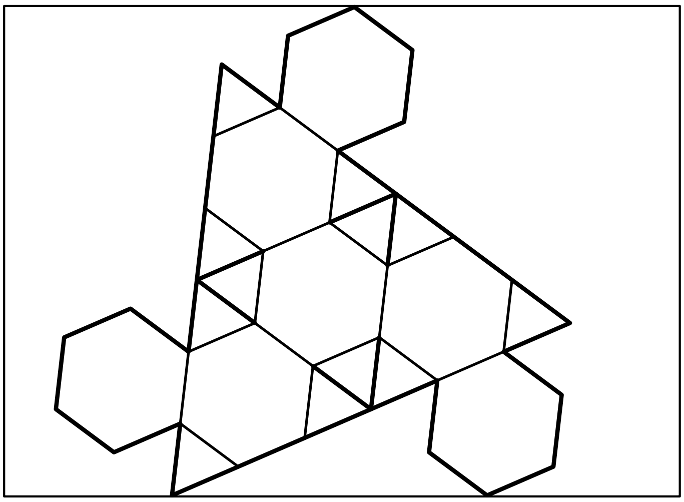

Figura 16: Planificação de um tetraedro a que foram cortados os vértices.

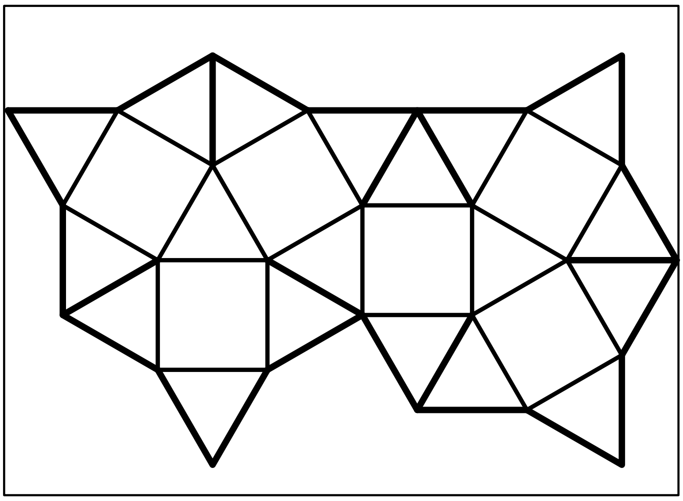

Figura 17: Planificação de um cuboctaedro.

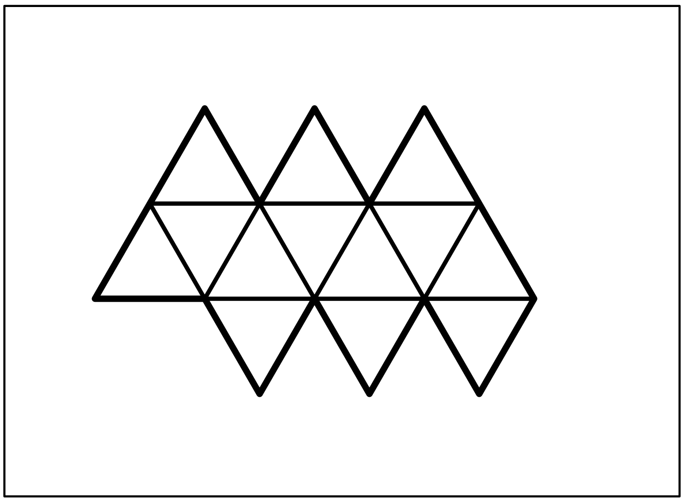

Figura 18: Planificação de um octaedro.

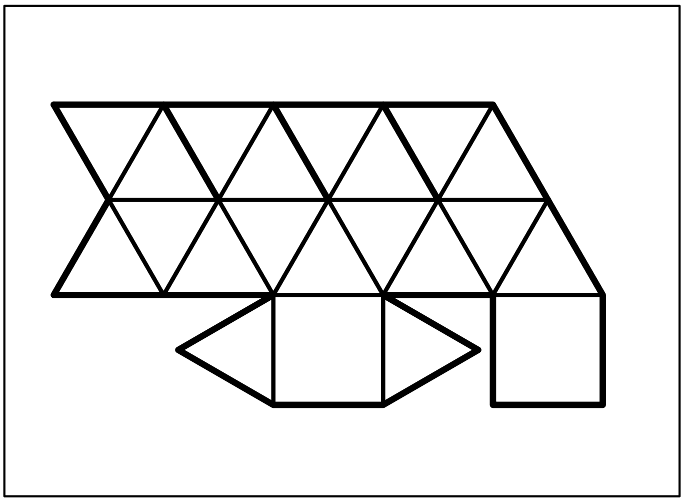

Figura 19: Planificação que permite construir dois poliedros diferentes.

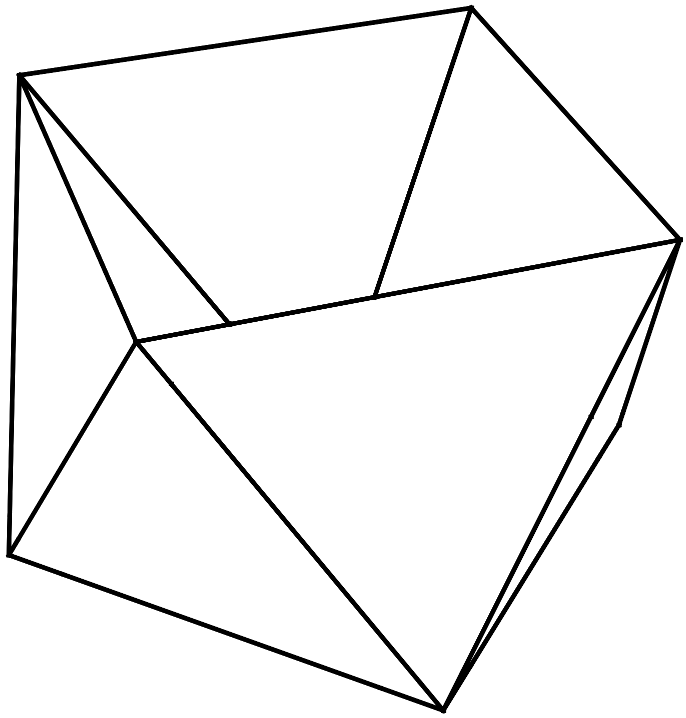

Figura 20: Um dos poliedros que se podem construir com a planificação da figura 19.

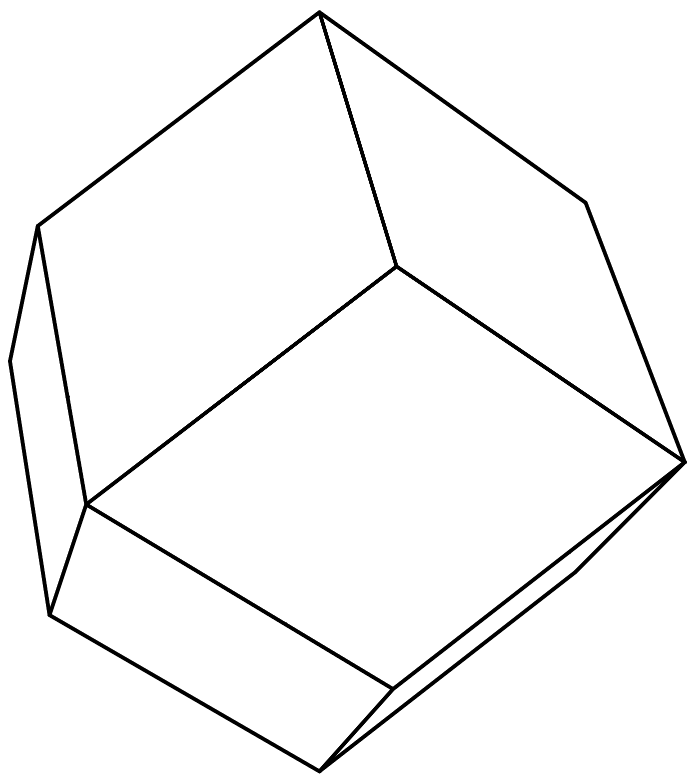

Figura 21: Dodecaedro rômbico.

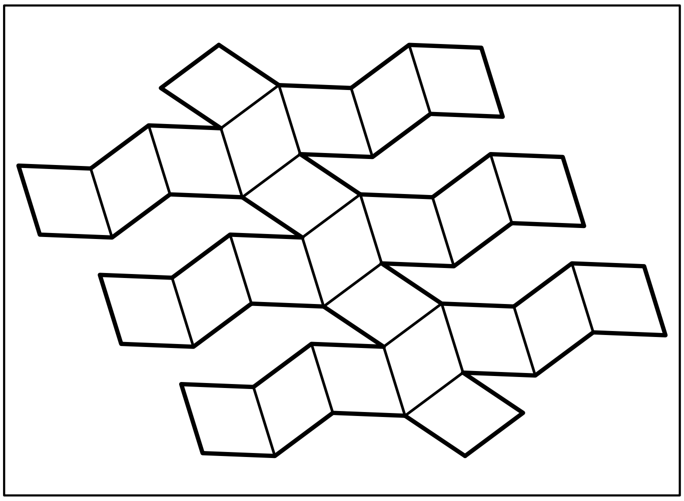

Figura 22: Planificação do poliedro que se encontra na figura 21.

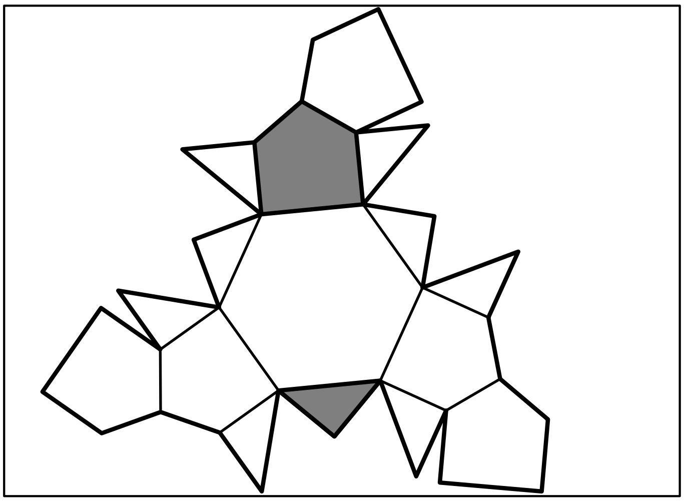

Figura 23: Planificação de um poliedro que se obtem cortando o da figura 21.

[2] Jean J. Pedersen, 1973, "Plaited Platonic Puzzles", College Math Journal **4** Nº3, 22–37.

[3] Denis Weaire (ed.) "The Kelvin Problem, foam structures of minimal surface area", Taylor & Francis (1996) ISBN: 0-748-0632-8.

[4] `http://www.math.lsa.umich.edu/~hales/countdown/`, Tamas Hausel, Endre Makai, Andras Szűcs, 2000, "Inscribing cubes and covering by rhombic dodecahedra via equivariant topology" a publicar.