

# Planificações de Poliedros e de Sólidos com Arestas Curvas

L. N. Gonçalves

Departamento de Física, Faculdade de Ciências e Tecnologia,  
Universidade Nova de Lisboa,  
P-2829-516 Monte da Caparica e  
Centro de Física da Matéria Condensada, Universidade de Lisboa,  
Avenida Professor Gama Pinto, 2,  
P-1649-003 Lisboa,  
Portugal.  
<http://pisco.cii.fc.ul.pt/>

## Parte I

Imaginar poliedros, conceber as suas planificações e construí-los é uma actividade capaz de exercitar e desenvolver, por exemplo:

- a capacidade de visualização,
- o interesse pela geometria e
- o gosto de experimentar.

Neste documento ensaia-se uma maneira de abordar esta actividade [1, 2]. Assume-se que se aprende a conceber planificações por um processo de tentativa e erro. Imagina-se uma hipótese de planificação, verifica-se se permite montar o poliedro pretendido e volta-se ao princípio. Não há uma receita para determinar a boa planificação automaticamente. Cada poliedro pode ser planificado de muitas maneiras. A maneira que se acaba por escolher é a que melhor satisfaz os critérios pessoais da estética e da funcionalidade.

Começamos por uma pirâmide quadrangular, logo a seguir uma dupla pirâmide pentagonal e terminamos esta primeira parte com mais alguns exemplos de poliedros convexos, imaginando cortes e colagens.

## Teoria

Começemos por uma pirâmide de base quadrada (ver figura 1). Se os lados da base tiverem comprimento  $l$  e se a pirâmide tiver altura  $h$  então o comprimento das arestas que se unem no vértice

superior é

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}l^2 + h^2}.$$

Munidos dos comprimentos de todas as arestas já podemos desenhar a planificação da pirâmide (ver figura 2). Agora recorta-se, dobra-se pelas arestas e usam-se as abas para colar. Aqui surge um problema: a última das faces a colar corta o acesso ao interior do poliedro e dificulta o pressionar da cola. Isto leva à utilização de cartolina muito fina por forma a tornar as dobras mais elásticas e exigirem menos pressão. Porém isto também torna o poliedro muito fácil de amachucar. É possível montar poliedros bastante rígidos aplicando a seguinte metodologia:

1. Em vez de abas desenhe as faces a que as abas colariam (ver figura 3).
2. Depois de vincar as arestas, coloque as faces alternadamente no lado exterior e no interior.
3. Use fita-cola para fixar a cartolina.

As planificações devem ser pensadas tendo em conta esta metodologia. Mesmo para melhorar a precisão dimensional deve reduzir-se o número médio de faces sobrepostas (ver figura 4). De maneira geral é boa política que as planificações possuam simetria central, que as faces com maior número de lados fiquem ao centro e que as faces encaixem como uma “dentadura”. Por exemplo, uma dupla pirâmide de base pentagonal (ver figura 5) poderia ser planificada tal como se mostra na figura 6 ou então como na 7.

## Notação

As linhas usadas no desenho das planificações devem ser interpretadas de acordo com o esquema da figura 8. Por outro lado, na figura 9 são descritos os tipos de faces usados. Todas as planificações são combinações deste conjunto de faces. Note-se ainda que só se consideram planificações de um único pedaço de cartolina.

## Prática

Vejam agora um cubo. Uma planificação possível é a que se apresenta na figura 10. Quando se deforma o cubo a planificação ressent-se (ver figura 11). A deformação aplicada consiste em afastar dois vértices que se encontrem sobre uma linha recta que contenha o centro do cubo.

**Exercício 1** a) *Suponha que corta o cubo unitário da figura 12 por um plano que contém A, B e C. Retire a parte que contém D e esqueça-a. Qual é a distância de E ao plano ABC?* b) *Cole um tetraedro de lados  $\sqrt{2}$  à superfície de corte. Corte o que resta do cubo segundo os planos que contém as faces expostas do tetraedro. Nestas condições a linha EF é cortada a que distância de F?* c) *Desenhe a respectiva planificação.*

Introduzamos agora uma pequena modificação no poliedro da figura 11: vamos substituir duas faces por quadrados. Em princípio as duas faces a substituir não terão arestas em comum (ver figura 13). Agora se a substituição por quadrados tiver lugar em faces com uma aresta em comum somos forçados a dobrar losangos (ver figura 14).

**Exercício 2** a) *Verifique que os poliedros das figuras 11 e 13 têm o mesmo volume.* b) *Construa um poliedro que se possa obter cortando ao meio qualquer dos dois.* c) *Planifique os dois poliedros análogos aos das figuras 10 e 11 mas cujas faces são do tipo (g) na figura 9.*

## Definições

Concerteza reparou que ao recortar o poliedro da figura 14 a tesoura não atinge o vértice indicado. Isto quer dizer que se poupou uma aba. A dobragem ficou mais difícil mas a rigidez do poliedro foi aumentada. Os vértices a que a tesoura não chega serão, daqui em diante, denominados por vértices planos. Planos no sentido em que a cartolina cobre  $2\pi$  rad à sua volta. Estes vértices são necessariamente extremos de uma ou mais arestas côncavas. Vários tipos de vértices podem ser definidos com base no ângulo  $\Theta$  coberto pela car-

tolina à volta dos mesmos.

$$\Theta = \sum_{i=1}^{N_f} \theta_i$$

em que  $N_f$  é o número de faces do poliedro que partilham um vértice e  $\theta_i$  é o ângulo no canto da face  $i$  que contém esse vértice.

**Vértice plano:**  $\Theta = 2\pi$  rad.

**Vértice não-plano:**  $\Theta \neq 2\pi$  rad.

**Vértice hiper-plano:**  $\Theta > 2\pi$  rad.

Descartes definiu o “ângulo de defeito”  $\delta = 2\pi - \Theta$ . A soma de todos os “ângulos de defeito” de um poliedro é sempre  $4\pi$ . A demonstração envolve o teorema de Euler ( $V + F = A + 2$  em que  $V$  é o número de vértices,  $F$  é o número de faces e  $A$  é o número de arestas) mas não será apresentada aqui [3].

## Continuação da Prática

Regressemos ao cubo que foi cortado de acordo com o exercício 1a). Uma, pela face triangular, dois iguais a esse (ver figura 15).

E agora regressemos ao início: a pirâmide da figura 1. Se se unirem duas pela base obtemos um octaedro. Os octaedros e os cubos são poliedros duais. Têm o mesmo número de arestas mas trocam os vértices por faces e vice-versa. Imagine o seguinte: pega num octaedro e corta os seis vértices a uma certa distância do centro sempre perpendicularmente aos eixos de simetria. São eixos de simetria as três linhas rectas que contém o centro e um par de vértices. Imagine que começa por cortar muito pouco e que vai diminuindo gradualmente a distância ao centro. A certa altura as faces triangulares equiláteras do octaedro original transformaram-se em hexágonos. Trata-se de um octaedro truncado, também conhecido por poliedro de Kelvin [4]. Não é possível obter uma planificação de acordo com o método descrito na Teoria porque sobra muito pouco espaço para as abas. Se fizer o mesmo com um tetraedro obtem espaço à justa (ver figura 16). Mas continuemos a cortar. Quando os hexágonos se tiverem reduzido a triângulos terá nas mãos um cuboctaedro (ver figura 17). Continuemos, finalmente chegamos ao cubo.

Voltemos a olhar para o octaedro. Quando colocado em cima da mesa vê-se uma faixa horizontal de triângulos (ver figura 18) alternadamente virados para cima e para baixo. A base pode ter qualquer forma. Quadrada por exemplo. Colemos a nossa pirâmide de partida a uma destas bases quadradas (ver figura 19). Mas repare: em vez

de colar a pirâmide pode escavar uma pirâmide e a planificação é a mesma (ver figura 20).

Pegando num octaedro ou num cubo e cortando as arestas até as faces originais desaparecerem obtem-se o poliedro da figura 21 e 22. Trata-se do dodecaedro rômbo. É possível preencher completamente o espaço encaixando dodecaedros rômboicos uns nos outros. Os centros de massa dos dodecaedros rômboicos nessa situação formam uma rede cúbica de faces centradas que corresponde ao máximo empacotamento de esferas [5]. É de notar que os vértices de um cuboctaedro também formam uma rede cúbica de faces centradas.

**Exercício 3** a) Considerando a analogia com o poliedro da figura 21 determine o ângulo (diedro) entre as faces sombreadas do poliedro cuja planificação se encontra na figura 23. b) Preencha o espaço apenas com cuboctaedros.

## Parte II

Nesta segunda parte serão apresentadas planificações de poliedros com elevada fracção de vértices planos, de um poliedro com o número mínimo de vértices não-planos, de um poliedro toroidal, de um poliedro pontualmente flexível, de um poliedro flexível e de dois sólidos com arestas curvas. É de relembrar que são vértices planos os do interior da planificação.

Como vimos no exemplo da figura 15 da parte I, em que há três vértices planos, a existência de concavidades pode facilitar bastante o desenho das planificações. Da figura 24 à 34, são vários os exemplos de poliedros cujas planificações possuem vértices planos.

**Exercício 4** a) Desenhe uma planificação análoga à da figura 27 mas com quadrados. b) Desenhe planificações análogas às das figuras 29 ou 30 mas colando tetraedros às faces de um tetraedro ou colando pirâmides quadradas às faces de um cubo. c) Quantos tetraedros pode colar a um cuboctaedro (se quiser planificá-lo)? d) Desenhe a planificação do poliedro que se obtém colando pirâmides em todas as faces de um prisma pentagonal. e) Construa um poliedro análogo ao da figura 28 que tenha  $3/20$  de vértices não-planos. f) Quantos poliedros diferentes é que se podem construir com a planificação 34?

## Toro

Nesta secção será apresentado um processo para imaginar um poliedro toroidal e a sua

planificação. Este processo pressupõe que é possível:

- Obter concavidades acentuadas usando apenas triângulos equiláteros (ver figura 35).
- Planificar vértices hiper-planos. São vértices hiper-planos aqueles cuja soma dos ângulos medidos sobre as faces à sua volta é superior a  $2\pi$  rad (ver figura 36).
- Construir um poliedro toroidal com a mesma simetria que o disfenóide cuja planificação se encontra na figura 37.

A primeira parte do processo consiste em orientar um hexaedro (dois tetraedros colados) segundo a descrição da figura 38. A segunda parte consiste em unir quatro hexaedros, todos orientados de maneira análoga. A terceira parte consiste em adicionar vértices em localizações bem determinadas. Considere os vértices indicados na figura 38. Transforme C em C' por reflexão no plano ABD. Obtem-se

$$\overline{CC'} = \sqrt{4 - \frac{242}{147 - 20\sqrt{15}}}$$

Se aproximar esta distância por  $\sqrt{3} - 1$  não cometerá um erro significativo e não precisará de régua para a medir pois a altura de dois triângulos equiláteros de lados unitários é  $\sqrt{3}$  (ver figura 39).

O erro que comete é da ordem de um e meio por cento. Os erros resultantes da espessura da cartolina e da montagem dos poliedros também são desta ordem e também não são, de maneira geral, significativos. No entanto há dois casos em que estes erros seriam inaceitáveis:

- Comparando a superfície específica de poliedros capazes de preencher o espaço [6].
- Tentando detectar flexibilidade. Este caso será estudado mais a fundo na secção seguinte.

## Flexíveis

O poliedro da figura 40 poderá parecer flexível mas nem sequer é um poliedro. As faces só parecem encaixar umas nas outras porque a cartolina se deforma ligeiramente. As arestas têm comprimentos mal calculados. Um cálculo, feito com base na figura 41, indica que se deveria ter  $r \approx 0.94414$  em vez de  $r = 1$ . Por outro lado, a figura 42 indica que o poliedro é apenas pontualmente flexível [7]. Considera-se flexível todo o poliedro cujos ângulos interfaciais podem variar sem

alterações da forma das faces. Foi demonstrado que estes poliedros têm volume constante [8], possuem arestas côncavas [9] e são flexíveis numa gama de ângulos interfaciais [10]. Um exemplo devido a Klaus Steffen da Universidade de Dusseldorf é o da figura 43.

**Exercício 5** a) Verifique se é possível construir um poliedro toroidal cujas faces sejam todos triângulos equiláteros. b) Verifique se é possível construir um poliedro flexível apenas com as faces da figura 9 da parte I.

## Arestas Curvas

Estudos de David Huffman [11] mostram que sólidos geométricos construídos a partir de folhas de papel podem possuir arestas curvas. Estas são mais difíceis de desenhar e vincar do que as retas, no entanto, permitem a construção de sólidos

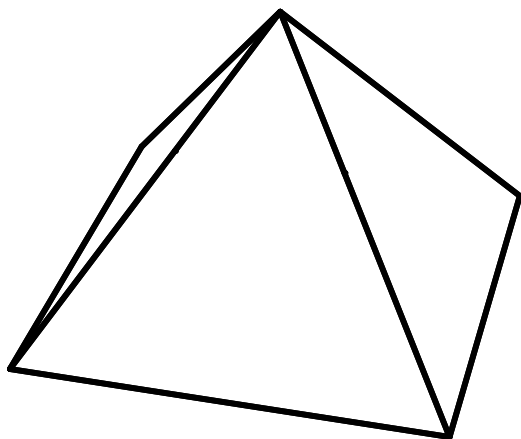
bastante simples. É claro que estes sólidos não são poliedros mas podem ser construídos de maneira análoga, em particular, de maneira análoga aos poliedros com elevada fracção de vértices planos. Por exemplo, podemos adaptar a planificação 32 para obter a da figura 44. A forma das arestas curvas pode ser definida por uma expressão quadrática ou por um “spline” de Bézier sem inflexões. Se pegarmos num tetraedro e curvamos uma aresta obtemos um sólido como aquele cuja planificação se encontra na figura 45.

**Exercício 6** a) Modifique a planificação 25 por forma a possuir arestas curvas. b) Qual é a expressão mais simples que define a forma de arestas curvas quando planificadas? b) As arestas curvas pertencem sempre a um plano?

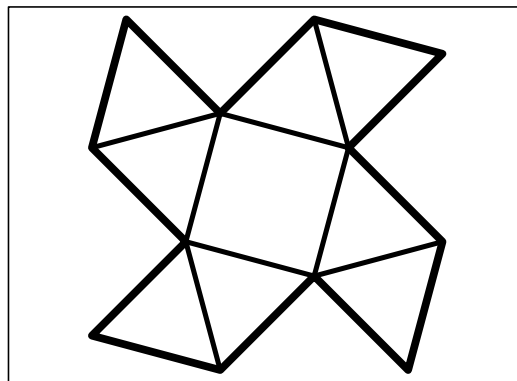
O autor agradece as críticas e as palavras de incentivo de Rui Rodrigues, Adérito Araújo, Eduardo Veloso e René Fonseca.

## Referências

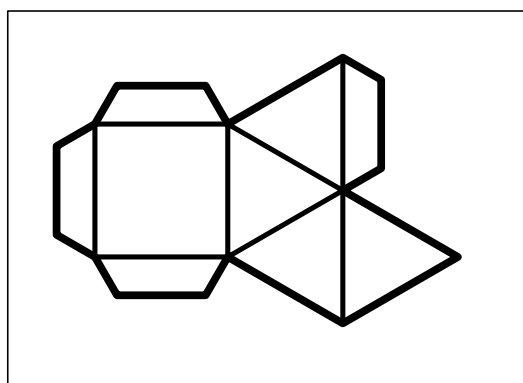
- [1] Peter Hilton, Jean Pedersen, “Build Your Own Polyhedra”, Addison Wesley (1988).
- [2] Jean J. Pedersen, 1973, “Plaited Platonic Puzzles”, College Math Journal 4 N<sup>o</sup>3, 22–37.
- [3] <http://www.geom.umn.edu/docs/doyle/mpis/handouts/node19.html>
- [4] Denis Weaire (ed.) “The Kelvin Problem, foam structures of minimal surface area”, Taylor & Francis (1996) ISBN: 0-748-0632-8.
- [5] <http://www.math.lsa.umich.edu/~hales/countdown/>, Tamas Hausel, Endre Makai, Andras Szűcs, 2000, “Inscribing cubes and covering by rhombic dodecahedra via equivariant topology” a publicar.
- [6] Ver o ficheiro [kelvin-9tile-transp.html](http://www.geom.umn.edu/graphics/pix/Special_Topics/Tilings/) na directoria [http://www.geom.umn.edu/graphics/pix/Special\\_Topics/Tilings/](http://www.geom.umn.edu/graphics/pix/Special_Topics/Tilings/). Denis Weaire, Robert Phelan, 1994, “A counterexample to Kelvin’s conjecture on minimal surfaces” Phil. Mag. Lett. 69 107–110.
- [7] Ver a página 161 do livro “The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry” de David Wells (1991) que mostra o icosaedro ortogonal de Jessen, também pontualmente flexível. Michael Goldberg, 1978, “Unstable Polyhedral Structures”, Mathematics Magazine 51 N<sup>o</sup>3, 165–170. Walter Wunderlich, 1979, “Snapping and Shaky Antiprisms”, Mathematics Magazine, 52 N<sup>o</sup>4, 235–236.
- [8] Robert Connely, I. Sabitov, A. Walz, 1997, “The Bellows Conjecture”, em “Contributions to Algebra and Geometry”, 38 N<sup>o</sup>1, 1–10.
- [9] Cauchy, 1813, Second Mémoire, J. École Polytechnique, 9 87, os poliedros convexos não podem ser flexíveis.
- [10] Robert Connely, 1979, “How to Build a Flexible Polyhedral Surface”, em “Geometric Topology” Proceedings of the 1977 Georgia Topology Conference (Athens, Georgia), edit. James C. Cantrell, Academic Press, 675. Robert Connely, 1979, “The Rigidity of Polyhedral Surfaces”, Mathematics Magazine, 52 N<sup>o</sup>5, 275–283.
- [11] <http://www.sgi.com/grafica/huffman/>. David A. Huffman, 1976, “Curvature and creases: A primer on paper”, IEEE Trans. Comput. C–25, 1010–1019



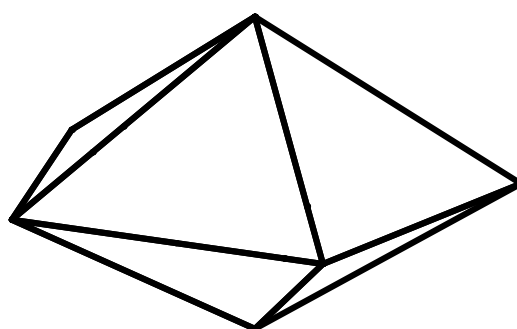
**Figura 1** Pirâmide de base quadrada e faces laterais triangulares equiláteras.



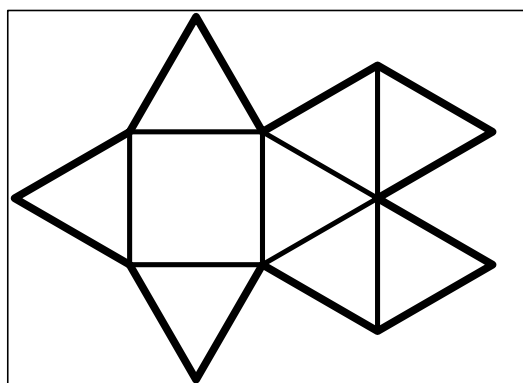
**Figura 4** Planificação proposta para a pirâmide da figura 1.



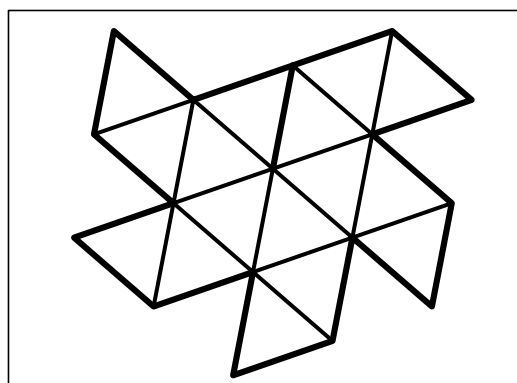
**Figura 2** Planificação típica da pirâmide da figura 1.



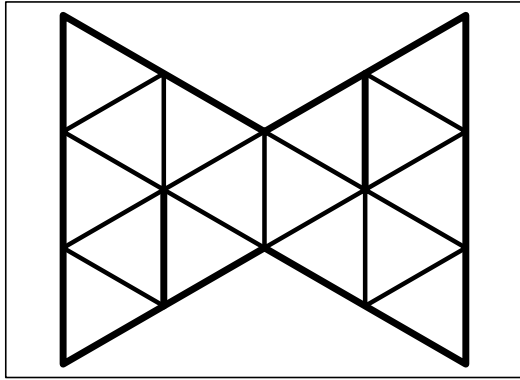
**Figura 5** Dupla pirâmide de base pentagonal e faces laterais triangulares equiláteras.



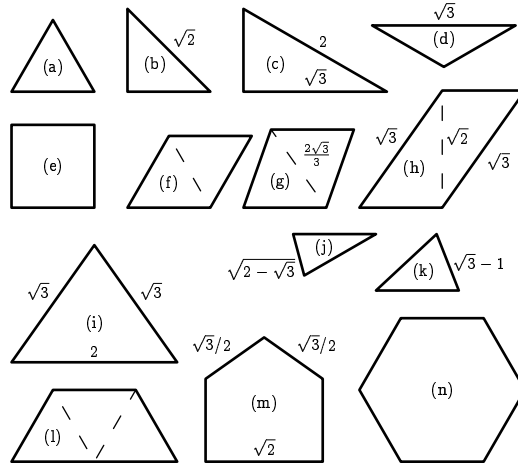
**Figura 3** Planificação modificada da pirâmide da figura 1.



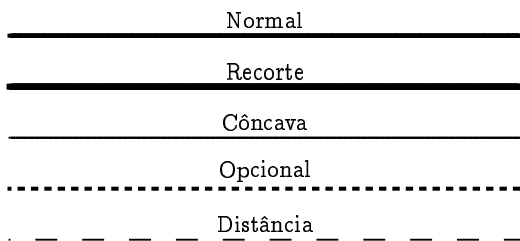
**Figura 6** Planificação possível do poliedro da figura 5. Veja também a figura 8.



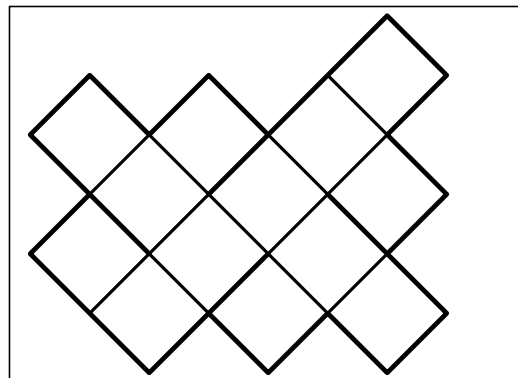
**Figura 7** Planificação proposta para o poliedro da figura 5.



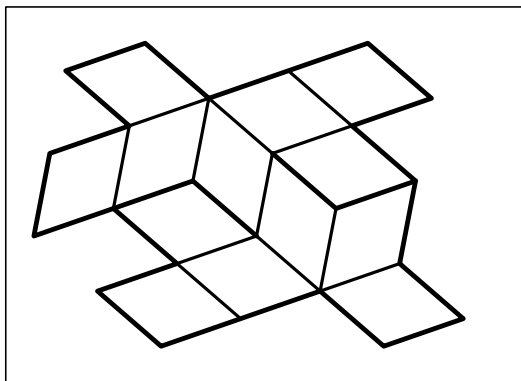
**Figura 9** Tipos de faces usados nos desenhos das planificações. (a) Triângulo equilátero. (b) Triângulo isósceles retângulo. (c) Triângulo escaleno retângulo. (d), (i), (j) e (k) Triângulos isósceles. (e) Quadrado. (f), (g) e (h) Losangos. (l) Trapézio. (m) Pentágono irregular. (n) Hexágono. As distâncias não indicadas são unitárias. O menor ângulo de (c) e (j) é  $\pi/6$ .



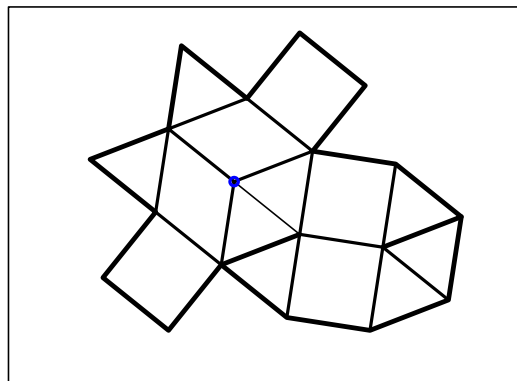
**Figura 8** Tipos de linhas usados nos desenhos de planificações. As linhas "Normal" e "Côncava" indicam as posições dos vincos, dobras ou arestas. Se fizer vincos convexos sobre as linhas "Normais" então deverá fazer vincos côncavos sobre as linhas "Côncavas" e vice-versa. A cartolina deverá ser recortada segundo as linhas de "Recorte". Se pretender desenhar as planificações com régua e compasso respeite as "Distâncias" indicadas.



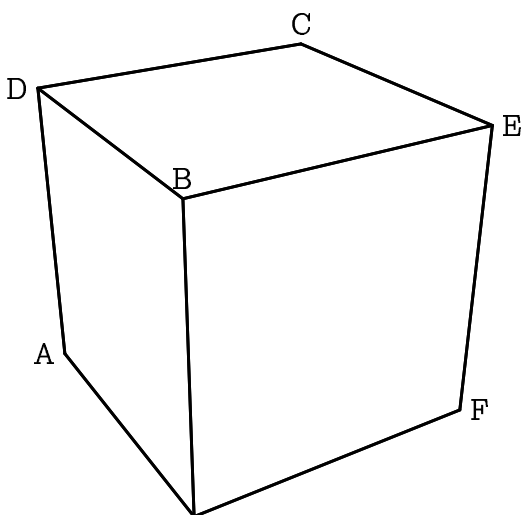
**Figura 10** Planificação proposta para o cubo.



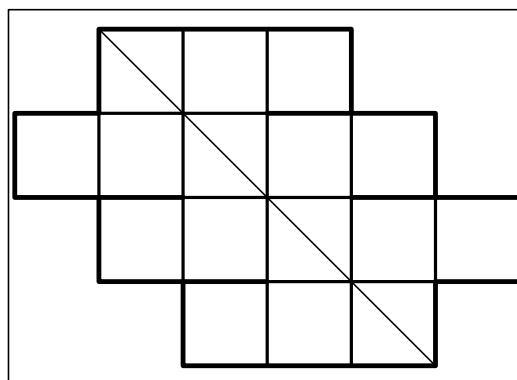
**Figura 11** Planificação de um cubo deformado em que as faces são losangos .



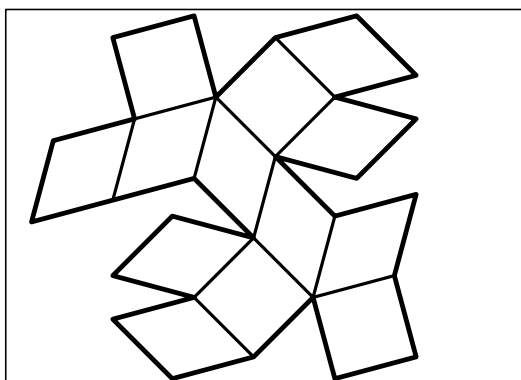
**Figura 14** Planificação de um poliedro com um vértice plano. O vértice plano está indicado por um pequeno círculo. Ver no texto a definição de vértice plano.



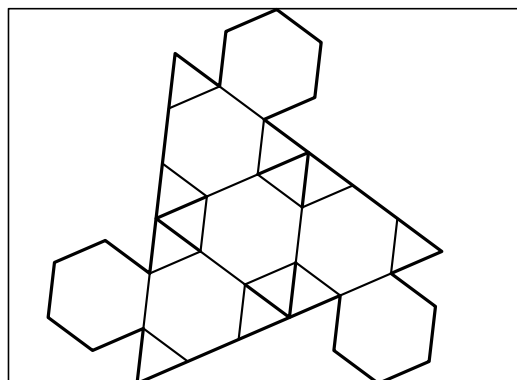
**Figura 12** Cubo para exercício.



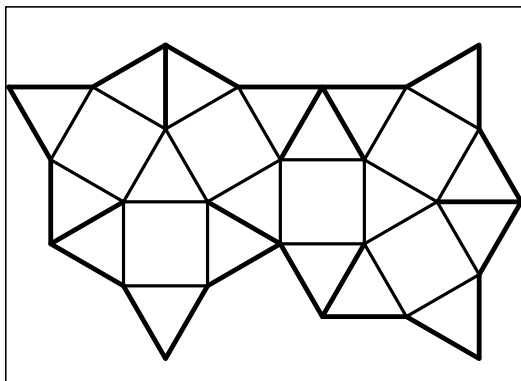
**Figura 15** Planificação do poliedro que se obtém unindo pela face triangular dois cubos cortados de acordo com o exercício 1a). Este poliedro possui três vértices planos.



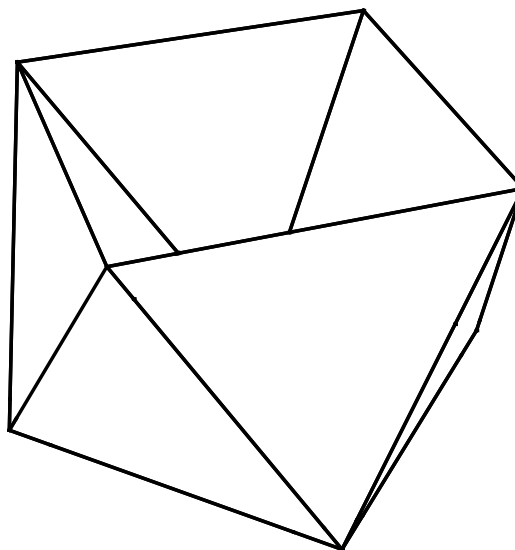
**Figura 13** Planificação de um cubo deformado em que quatro das faces são losangos.



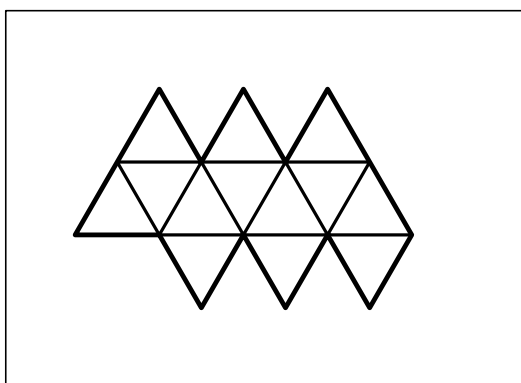
**Figura 16** Planificação de um tetraedro a que foram cortados os vértices.



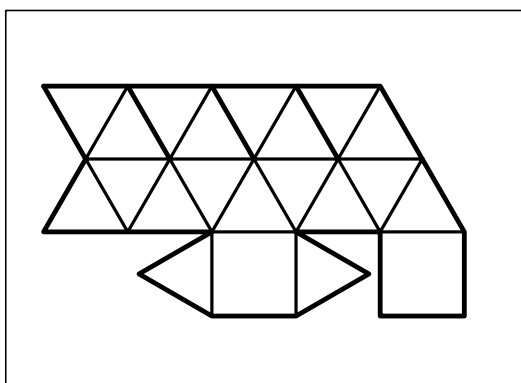
**Figura 17** Planificação de um cuboctaedro (representado na figura 21).



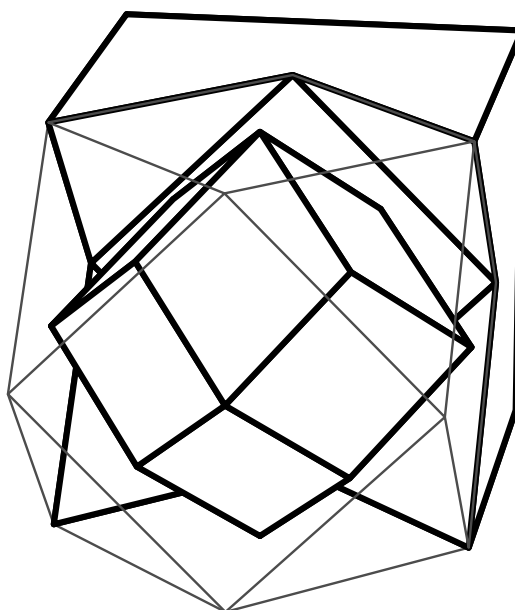
**Figura 20** Um dos poliedros que se podem construir com a planificação da figura 19.



**Figura 18** Planificação de um octaedro.

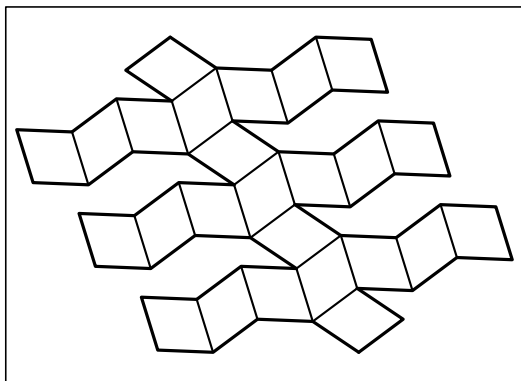


**Figura 19** Planificação que permite construir dois poliedros diferentes.

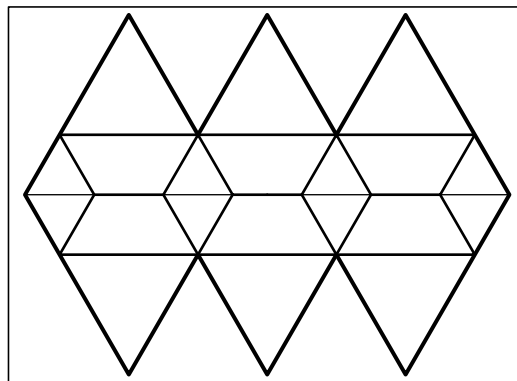


**Figura 21** Dodecaedro rômico inserido numa rede cúbica de faces centradas e o correspondente cuboctaedro.

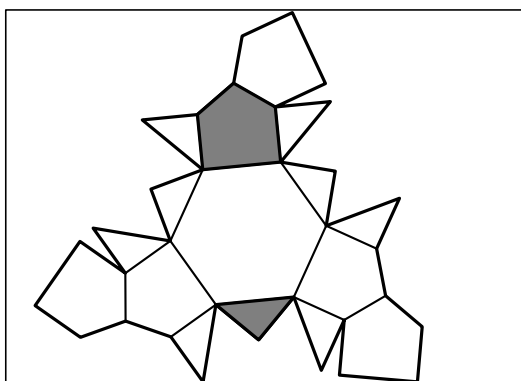




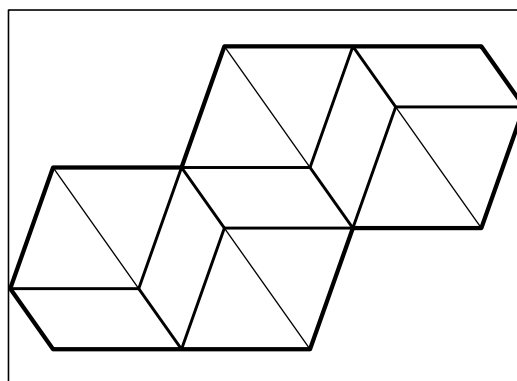
**Figura 22** Planificação do dodecaedro rômbo que se encontra na figura 21.



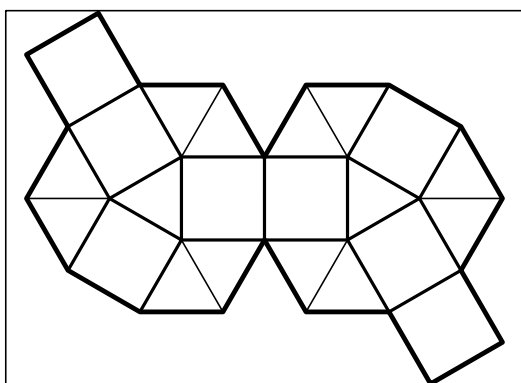
**Figura 25** Este poliedro tem metade dos vértices planos e constitui uma das formas dos cristais de espinela ( $MgAl_2O_4$ ).



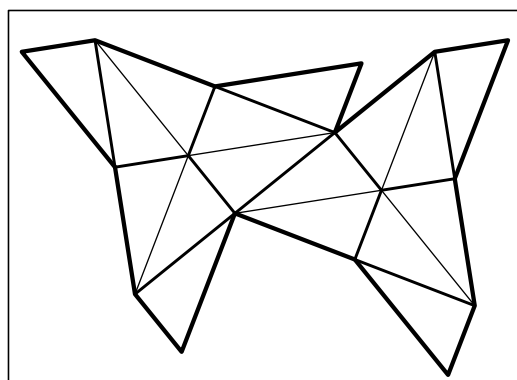
**Figura 23** Planificação de um poliedro que se obtém cortando o da figura 21.



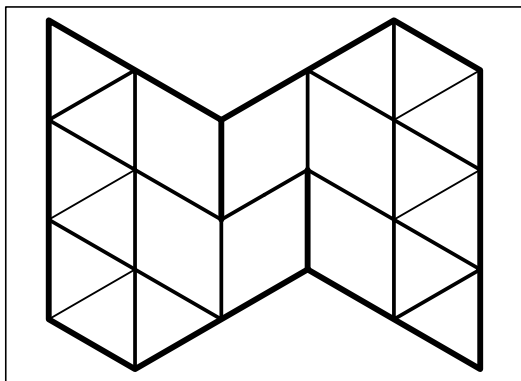
**Figura 26** Adicionar arestas a um prisma quadrangular, fazendo cortes, pode simplificar a planificação.



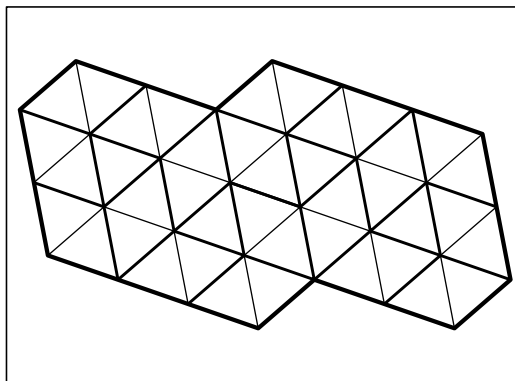
**Figura 24** Quatro prismas triangulares iguais. Um ao centro na vertical e os outros à volta na horizontal.



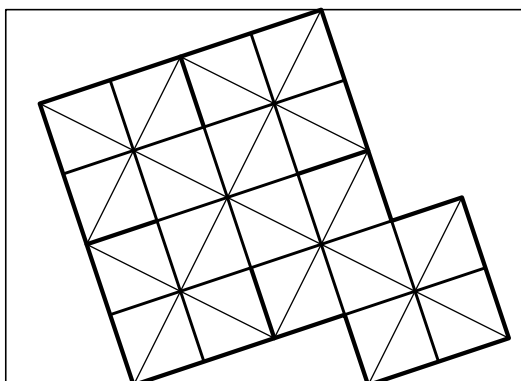
**Figura 27** Unir dois triângulos equiláteros pelas bordas.



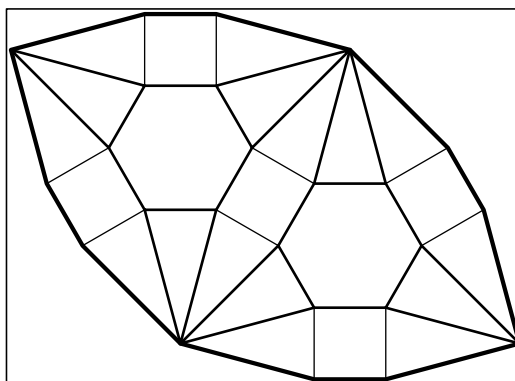
**Figura 28** Um par de vértices define uma recta que é completamente exterior ao volume do poliedro.



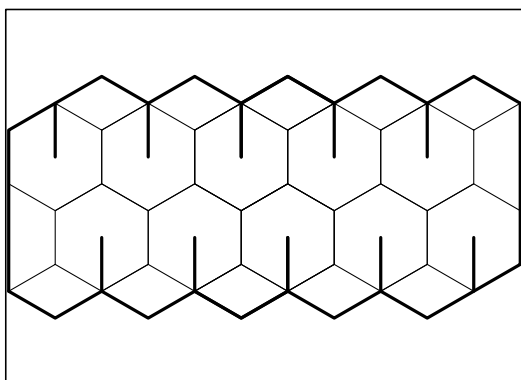
**Figura 31** Colar quatro tetraedros a um icosaedro por forma que os tetraedros não contactem entre si. 1/4 de vértices não-planos.



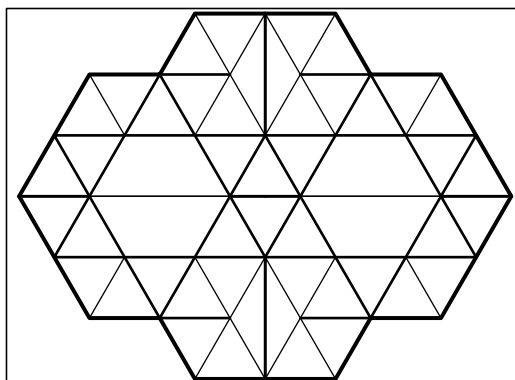
**Figura 29** Colar a cada face de um octaedro uma pirâmide de lados isósceles rectângulos.



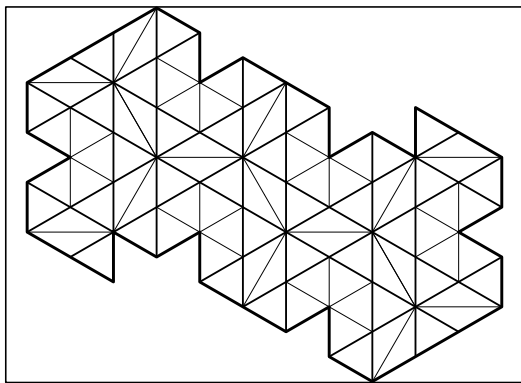
**Figura 32** Apenas três vértices não-planos. 1/5 de vértices não-planos. Dobragens muito difíceis. Três é o número mínimo de vértices não-planos que um poliedro pode ter pois, dado que o "ângulo de defeito total" é  $4\pi$  rad, se se tivesse um poliedro com apenas dois vértices não-planos, cada um teria um "ângulo de defeito" de  $2\pi$  rad, ou seja, não existiria.



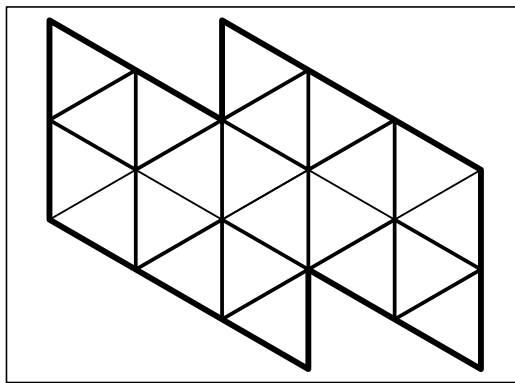
**Figura 30** Colar pirâmides pentagonais às faces de um dodecaedro. As linhas de espessura "normal" não foram representadas.



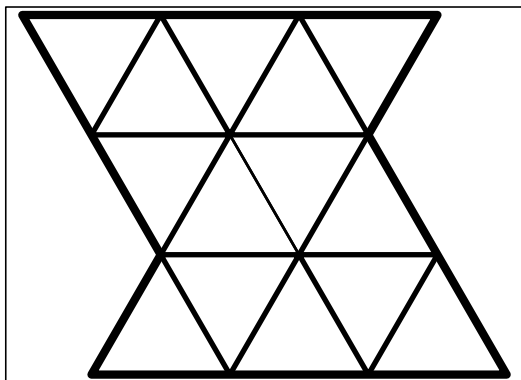
**Figura 33** 1/6 de vértices não-planos.



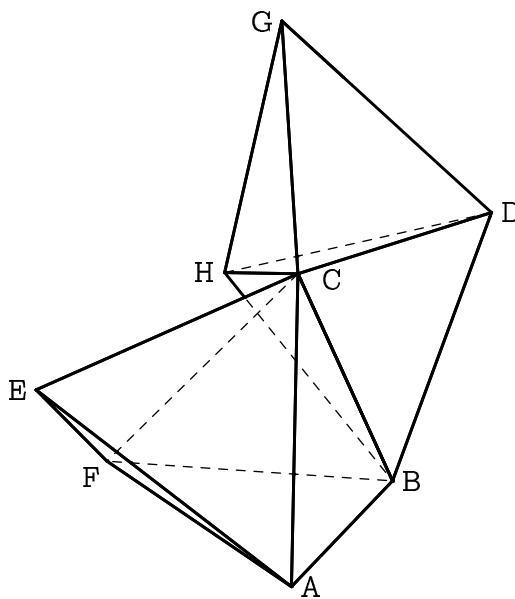
**Figura 34** Apenas 3/19 de vértices não-planos. Poliedro de 72 faces baseado no cubo.



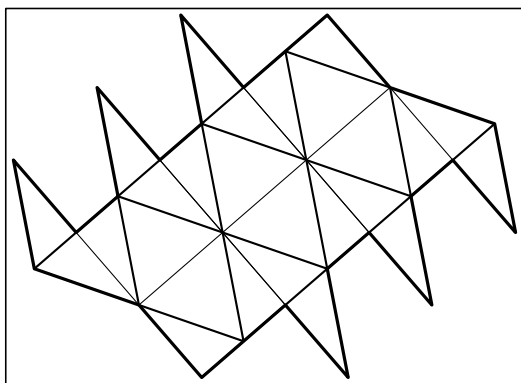
**Figura 37** Disfenóide.



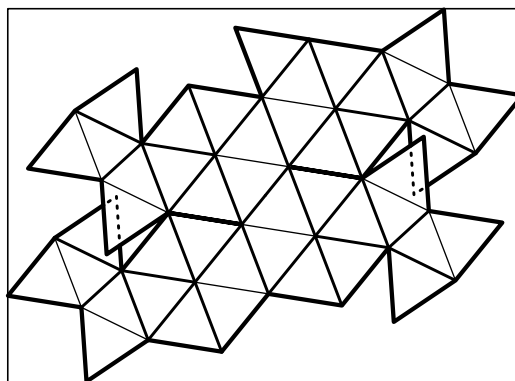
**Figura 35** Depois de construído este poliedro experimente forçar a aproximação dos dois vértices de menor  $\Theta$ . Verifique o que acontece aos vértices planos durante esse processo.



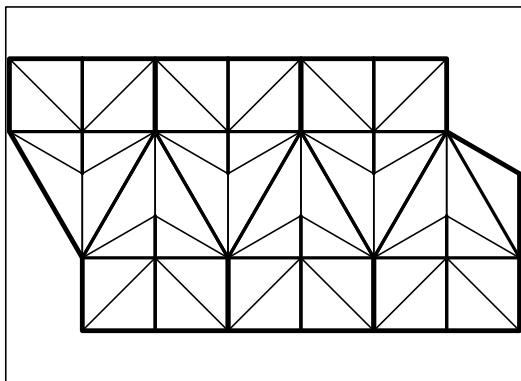
**Figura 38** Arestas: EF e GH pertencem ao plano  $xz$ ; BC pertence ao plano  $yz$ ; CF e CH pertencem a planos verticais que fazem um ângulo diedro de  $\frac{\pi}{4}$  rad com  $yz$ . Ângulos:  $\theta$  (entre EB e o plano  $xy$ ).



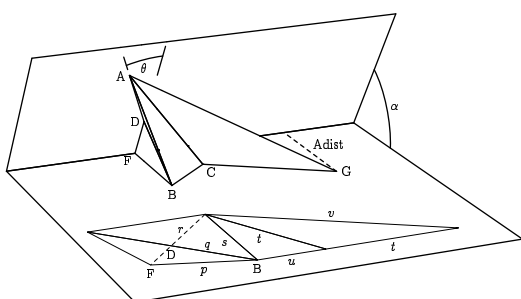
**Figura 36** Os dois vértices hiper-planos deste poliedro possuem  $\Theta = 3\pi$  rad.



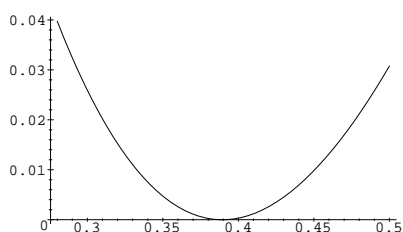
**Figura 39** Planificação de um poliedro toroidal.



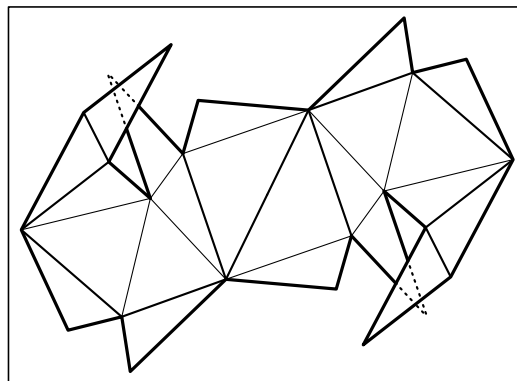
**Figura 40** Planificação com arestas mal calculadas.



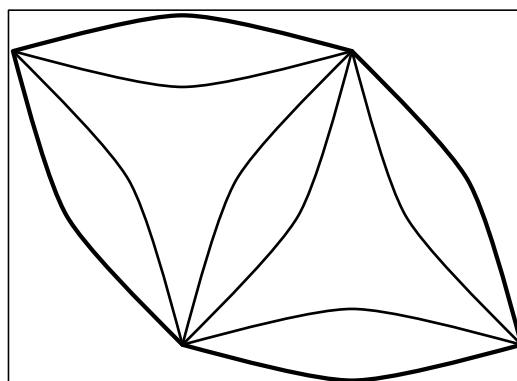
**Figura 41** Esquema descritivo das variáveis usadas no cálculo dos comprimentos das arestas do poliedro cuja planificação se encontra na figura 40. Aqui está representada uma das doze partes iguais que constituem o referido poliedro. As partes não encaixam perfeitamente se a distância entre o ponto A e a linha que é vértice do ângulo  $\alpha$  não for igual a Adist. O plano BDF é vertical e não contém nenhuma das faces do poliedro da figura 40.



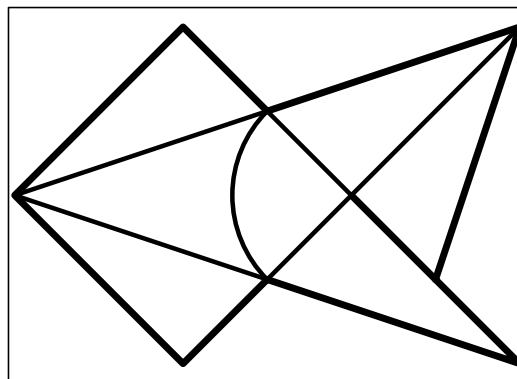
**Figura 42** Erro relativo de Adist em função de  $\theta$ .



**Figura 43** Planificação de um dos mais simples poliedros flexíveis conhecidos. Este poliedro só tem quatro tipos de faces, todas triangulares, nenhuma das quais se encontra na figura 9 da parte I. Os comprimentos das arestas em unidades arbitrárias para cada face são: (12,12,17), (10,10,11), (12,12,11) e (5,10,12).



**Figura 44** Planificação dum sólido com arestas curvas baseado no poliedro da figura 32.



**Figura 45** Planificação dum sólido com uma aresta curva baseado no tetraedro.